**現代数学基礎 CIII　12 月 05 日分演習解答**[*1]

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp
`https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida/2019WC3.html`

# 9　関数の表示

## 9.1　有理型関数の部分分数分解

**問題 9.1.** $f(z) := \frac{z}{e^z-1}$ とすると $z\cot z = iz\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{e^{iz}-e^{-iz}} = f(2iz) + iz$.
　これに $f(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} z^2 n(-1)^{n-1} B_n/(2n!)$ を代入すれば結論を得る.

**問題 9.2.** $|z| < \pi$ なら $z^2/(n^2\pi^2 - z^2) = \sum_{k=1}^{\infty}(z/n\pi)^{2k}$ なので, それを $\cot z = z^{-1} + \sum_{n=1}^{\infty} 2z/(z^2 - n^2\pi^2)$ に代入して二重級数定理をもちいると結論が得られる.

**問題 9.3.** Mittag-Leffler の定理により右辺の $f(z) := \frac{1}{z} + \sum_{n=\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z-n\pi}$. は有理型関数を定める. 一方 $1/\sin z$ は $z = n\pi$ $(n \in \mathbb{Z})$ で一位の極を持ちその留数は $(-1)^n$ だから, $\varphi(z) := f(z) - 1/\sin z$ は整関数. $\varphi(z)$ が有界であることが示せるので, $\varphi(z)$ は定数. $z = 0$ で $\varphi(0) = 0$ なので $\varphi(z) = 0$.

**問題 9.4.** $\tan z = \frac{2\sin^2 z}{2\sin z\cos z} = \frac{1-\cos 2z}{\sin 2z} = \frac{1}{\sin 2z} - \cot 2z$ なので, 問題 9.3 と $\cot z = z^{-1} + \sum_{n=1}^{\infty} 2z/(z^2 - n^2\pi^2)$ (講義ノートの命題 9.1.2) より

$$\tan z \;=\; \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{(-1)^n 4z}{4z^2 - n^2\pi^2} - \frac{4z}{4z^2 - n^2\pi^2}\Big) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2z}{(2n-1)^2(\pi/2)^2 - z^2}.$$

## 9.2　整関数の無限積表示

**問題 9.5.** $\sin z$ の無限積表示から

$$\cos z \;=\; \frac{\sin 2z}{2\sin z} \;=\; 2z\prod_{n=1}^{\infty}\Big(1 - \frac{4z^2}{n^2\pi^2}\Big)\Big/ z\prod_{n=1}^{\infty}\Big(1 - \frac{4z^2}{(2n)^2\pi^2}\Big) \;=\; \prod_{n=1}^{\infty}\Big(1 - \frac{4z^2}{(2n-1)^2\pi^2}\Big).$$

**問題 9.6.** $\sin z$ の無限積表示から

$$e^z - 1 \;=\; e^{z/2}2i\sin(z/2\pi) \;=\; e^{z/2}2i\cdot\frac{z}{2i}\prod_{n=1}^{\infty}\Big(1 - \frac{(z/2i)^2}{(2n)^2\pi^2}\Big) \;=\; e^{z/2}z\prod_{n=1}^{\infty}\Big(1 + \frac{z^2}{4n^2\pi^2}\Big).$$

## 9.3　Weierstrass の因数分解定理

**問題 9.7.** $k = 0$ の時は $|1 - E_0(z)| = |z| < 2e\,|z|$. 以下 $k \geq 1$ とする. $|z| < 1/2$ で $\mathrm{Log}(1-z) = -\sum_{n=1}^{\infty} z^n/n$ は $\exp(\mathrm{Log}(1-z)) = 1 - z$ を満たすので, $w := -\sum_{n=k+1}^{\infty} z^n/n$ とすれば

$$E_k(z) \;=\; \exp(\mathrm{Log}(1-z) + z + z^2/2 + \cdots + z^k/k) \;=\; e^w.$$

[*1] 2019/08/02 版, ver. 0.1.

$|z| < 1/2$ より

$$|w| \le |z|^{k+1} \sum_{n=k+1}^{\infty} |z|^{n-k-1}/n \le |z|^{k+1} \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j} \le 2|z|^{k+1}.$$

特に $|w| \le 1$ となるので,

$$|1 - E_k(z)| = |1 - e^w| = \left| \int_0^w e^z \, dz \right| \le \sup_{z \in \overline{0w}} |e^z| \cdot |w| \le e|w|.$$

最後に $|w| \le (k+1)^{-1} |z|^{k+1} / (1 - |z|) \le (k+1)^{-1} 2 |z|^{k+1} \le 2|z|^{k+1}$ より

$$|1 - E_k(z)| \le e|w| \le 2e|z|^{k+1}.$$

**問題 9.8.** $z_0 \in \Omega$ を固定し, $c_0 \in \mathbb{C}$ を $c_0 := \mathrm{Log}_{\Omega}(f(z_0))$, すなわち $e^{c_0} = f(z_0)$ なるものとする. $\Omega$ 上の関数 $g$ を

$$g(z) = \int_C \frac{f'(w)}{f(w)} dw + c_0$$

で定義する. 但し積分路 $C$ は $z_0$ を始点とし $z$ を終点とする $\Omega$ 内の曲線. $\Omega$ が単連結領域なので $g$ は $C$ の選び方によらず定まる. Cauchy の積分定理の証明と同様にして $g$ は正則で $g' = f'/f$ となることが分かる. すると $\Omega$ 上で $(fe^{-g})' = 0$ となるので $fe^{-g}$ は定数関数. 定め方から $f(z_0)e^{-g(z_0))} = 1$ なので, $\Omega$ 上で $f = e^g$.

## 9.4 その他の問題

**問題 9.9.** 原点中心で半径 $R > 0$ の上半平面内にある半円周に正の向き付けを入れたものを $C_R$, それと $[-R, R]$ を合わせた閉曲線を $C$ と書く. $R$ が十分大きければ, $f(z) := (1 + z^2)^{-(n+1)}$ の $C$ の内部での極は $z = i$ のみで位数は $n + 1$. よって

$$\begin{aligned} \int_C f(z)\, dz &= 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=i} f(z) = \frac{2\pi i}{n!} \Big( \frac{d^n}{dz^n} \frac{(z-i)^{n+1}}{(z^2+1)^{n+1}} \Big) \Big|_{z=i} \\ &= 2\pi i \cdot (-1)^n \binom{2n}{n} (2i)^{-2n-1} = \pi \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}. \end{aligned}$$

一方 $\int_C f(z)\, dz = \int_{-R}^{R} f(z)\, dz + \int_{C_R} f(z)\, dz$ で, $\left| \int_{C_R} f(z)\, dz \right| \le \pi R \cdot \sup_{z \in C_R} |f(z)| = \pi R/(R^2 - 1)$ により $R \to 0$ で $\int_{C_R} f(z)\, dz \to 0$ が分かる. 以上から結論が得られる.

以上です.