現代数学基礎 CⅢ　12 月 05 日分講義ノート[*1]

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp
`https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida/2019WC3.html`

9 関数の表示

今回は与えられた極を持つ有理型関数および与えられた零点をもつ正則関数の構成を考える.

9.1 有理型関数の部分分数展開

この副節に関しては [杉浦, 第 IX 章 §10] を参照せよ.

(実) 有理関数の積分をするには部分分数分解して分母の次数を下げるのが定石であった. この副節では有理型関数の部分分数展開を考える. 部分分数展開は, 極における主部を記述しているものとみなせる. そこで次のような問題を考えよう.

点列 $\{a_n\} \subset \mathbb{C}$ とそこでの主部 (定義 7.1.6)

$$P_n(z) = \sum_{k=1}^{m_n} \frac{c_{n,k}}{(z-a_n)^k}$$

が与えられたとして, それを満たす $\mathbb{C}$ 上の有理型関数 f を求める問題を考える. $\{a_n\}$ が有限個の集合なら, $f = \sum_n P_n(z) +$ (整関数) がこの問題の (完全な) 答である. そこで可算無限個の $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が与えられた場合を考える. $n \neq m$ なら $a_n \neq a_m$ とする.

数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が収束部分列を持つなら, 有理型関数の定義 (§8.2) からその収束先は ∞ である. そこで必要なら番号を付け替えて

$$|a_0| \le |a_1| \le \cdots, \quad \lim_{n\to\infty} |a_n| = +\infty$$

と仮定して良い. すると $n \neq 0$ なら $a_n \neq 0$ であり, $P_n(z)$ は $|z| < |a_n|$ で正則なので, 以下のように Taylor 展開できる.

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_{n,k} z^k \quad (|z| < |a_n|,\ n > 0)$$

このとき, 次の Mittag-Leffler [*2] による定理が成立する.

定理 9.1.1 (Mittag-Leffler の定理 [杉浦, 第 IX 章 §10 定理 10.1]). 上記の仮定を満たす点列 $A := \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ と主部 $P_n(z)$ が任意に与えられたとき, 各 $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し $k(n) \in \mathbb{N}$ が存在して, $\varphi_n(z) := \sum_{k=0}^{k(n)} b_{n,k} z^k$ および $\varphi_0(z) := 0$ とすると, 級数

$$g(z) := \sum_{n=0}^{\infty} (P_n(z) - \varphi_n(z))$$

は $\mathbb{C} \setminus A$ 上で広義一様収束する. そして g は $\mathbb{C}$ 上の有理型関数であり, 極の集合は A で, 各 a_n における主部は P_n となる.

[*1] 2019/12/04 版, ver. 0.2.

[*2] スウェーデンの数学者で, カタカナだとミッタク・レフラー. 二人ではなく一人の数学者です.

ここで $S \subset \mathbb{C}$ で**広義一様収束する**とは, S の任意のコンパクト部分集合で一様収束することをいう.

証明. 冪級数 $P_n(z)$ の収束円板に開円板 $D_0(|a_n|/2)$ が含まれるから, $D_0(|a_n|/2)$ では $P_n(z)$ は一様収束する. 従って $k(n) \in \mathbb{N}$ が存在して, $\varphi_n(z)$ を $P_n(z)$ の $k(n)$ 項までの和とすれば,

$$|P_n(z) - \varphi_n(z)| < 2^{-n} \quad (\forall z \in D_0(|a_n|/2)). \tag{9.1}$$

$R \in \mathbb{R}_{>0}$ を任意にとると, 数列 $\{a_n\}$ の仮定より, ある $N_R \in \mathbb{N}$ が存在して $n > N$ なら $|a_n| > 2R$ となる. よって $n > N_R$ なら $P_n(z)$ は $D_0(R)$ で正則であり, (9.1) より

$$h(z) := \sum_{n=N_R+1}^{\infty} (P_n(z) - \varphi_n(z))$$

は $D_0(R)$ において一様収束する. 従って h は $D_0(R)$ 上の正則関数である. すると

$$g = \sum_{n=0}^{N_R} (P_n - \varphi_n) + h$$

は $D_0(R)$ 上の有理型関数で, 極の集合は $\{a_n \mid 0 \le n \le N_R\}$ であり, a_n における主部は P_n.

以上の議論で R は任意に取っていたから, $R \to \infty$ で結論が得られる. □

三角関数で具体例を見ていこう.

命題 9.1.2. $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ で中辺および右辺は広義一様収束し, 次の等式が成立する.

$$\cot z = \frac{1}{z} + \sum_{n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{1}{z - n\pi} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2\pi^2}.$$

中辺は Mittag-Leffler の定理 9.1.1 で $A = \{n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\}$, $P_n(z) = 1/(z - n\pi)$, $k(n) = 0$ としたものである. $\cot z$ は中辺と同じ極と主部を持つので, $\cot z -$ (中辺) は整関数である. 上の命題は, この整関数が 0 である, という主張とも読める.

以下で証明の概略を説明する. 詳しくは [SS, Chap. 5, §3.2] を参照のこと. また [杉浦, 第 IX 章 §10] にも別の証明がある.

略証. $\cot z$ と中辺は, z の関数として次の三条件を満たす.

(i) $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ に対して $F(z + \pi) = F(z)$.

(ii) $z = 0$ の近傍で正則な関数 F_0 があって $F(z) = z^{-1} + F_0(z)$.

(iii) $F(z)$ は $z \in \pi\mathbb{Z}$ で 1 位の極を持ち, それ以外に特異点を持たない.

そこで $d(z) := \pi \cot \pi z - \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} (z + n)^{-1}$ とおく. $d(z)$ も条件 (i) を満たし, また整関数である. 実は $d(z)$ が有界であることが示せて, すると (整関数に関する) Liouville の定理より $d(z) = 0$ となる. □

上の命題を辺々微分することで, 次の主張も得られる.

命題 9.1.3. $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ で右辺は広義一様収束し, 次の等式が成立する.

$$\frac{1}{\sin^2 z} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z - n\pi)^2}$$

$z \cot z$ の部分分数展開と Taylor 展開を比較することで Riemann ゼータ関数の偶数における値が計算できることを演習問題で見る.

9.2 整関数の無限積表示

この副節に関しては [SS, Chap. 5 §3] を参照せよ.

前副節では極における主部が与えられたときに関数を構成する問題を考えたが, この副節は零点における位数が指定された場合を考えよう. それは多項式の因数分解の拡張と思えるので, まず複素数列の無限積から思い出しておこう.

複素数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ に対し, **無限積** $\prod_{n=0}^{\infty}(1+a_n)$ **が収束する**とは, 極限 $\lim_{N\to\infty}\prod_{n=0}^{N}(1+a_n)$ が存在することをいう.

補題 9.2.1. 複素数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ に対し, もし $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|<\infty$ ならば, 無限積 $\prod_{n=0}^{\infty}(1+a_n)$ は収束する.

証明. $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|<\infty$ より十分大きい n に対して $|a_n|<1/2$. $\mathrm{Log}(1+z):=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}z^k/k$ とすれば $1+a_n=e^{\mathrm{Log}(1+a_n)}$ となるので, $B_N:=\prod_{n=0}^{N}(1+a_n)=e^{L_N}$, $L_N:=\sum_{n=0}^{N}\mathrm{Log}(1+a_n)$. ここで $|a_n|<1/2$ より $|\mathrm{Log}(1+a_n)|<2|a_n|$ となることに注意して, 仮定より B_N は $N\to\infty$ で収束する. □

定理 9.2.2. $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を開集合 $\Omega\subset\mathbb{C}$ 上の正則関数の列とする. $\sum_{n=0}^{\infty}c_n<\infty$ かつ任意の $z\in\Omega$ に対し $|F_n(z)-1|\le c_n$ となる正の実数列 $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が存在すると仮定する.

(1) 無限積 $\prod_{n=0}^{\infty}F_n(z)$ は Ω 上一様に正則関数 $F(z)$ に収束する.

(2) 各 n に対し $F_n(z)\neq 0$ ならば次の等式が成立する.

$$\frac{F'(z)}{F(z)} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{F_n'(z)}{F_n(z)}.$$

証明. (1) $F_n(z)=1+a_n(z)$ と書けば $|a_n(z)|\le c_n$ なので, 補題 9.2.1 より無限積は収束する. またこの評価は z によらないので一様収束することも分かる. すると定理 6.5.2 (正則関数の一様収束極限は正則関数) より極限 $F(z)$ も正則だと分かる.

(2) $K\subset\Omega$ をコンパクト集合とし, $G_N:=\prod_{n=1}^{N}F_n$ とする. Ω 上一様に $G_N\to F$ と収束することが示せたので, Weierstrass の定理 6.5.3 (正則関数の微分の一様収束極限) より Ω 上一様に $G_N'\to F'$ と収束し, 従って一様に $G_N'/G_N\to F'/F$ となる. 一方で直接計算で $G_N'/G_N=\sum_{n=1}^{N}F_n'/F_n$ となるので, 結論を得る.

□

再び三角関数で具体例を見ていこう.

命題 9.2.3. $\mathbb{C}$ において右辺は広義一様収束し, 次の等式が成立する.

$$\sin z = z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2\pi^2}\right).$$

証明. 定理 9.2.2 の記号に合わせて $F_n(z):=1-z^2/(n\pi)^2$ とする. $R\in\mathbb{R}_{>0}$ を任意に取って固定する. $c_n:=R^2/(n\pi)^2$ とすれば, $\sum_{n=0}^{\infty}c_n<\infty$ かつ $|z|<R$ なら $|F_n(z)-1|\le c_n$ となるので, 定理 9.2.2 (1) よりこの領域で右辺の無限積は一様収束する. つまり右辺は $\mathbb{C}$ 上広義一様収束する.

右辺が定める関数を f と書くと, 定理 6.5.2 (正則関数の一様収束極限は正則関数) より f は整関数. すると

定理 9.2.2 より

$$\frac{f'(z)}{f(z)} \;=\; \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2\pi^2}.$$

命題 9.1.2 より右辺は $\cot z$ に等しい．一方 $g(z) := \sin z$ も $g'(z)/g(z) = \cot z$ を満たす．よって $f'/f = g'/g$ で, これから $(f/g)' = 0$ が従う．つまり f/g は定数関数．それを c とおくと,

$$1 \;=\; \lim_{z\to 0} \frac{f(z)}{z} \;=\; \lim_{z\to 0} c\frac{g(z)}{z} \;=\; c$$

より $c = 1$ となって, 結論が得られる． □

9.3 Weierstrass の因数分解定理

この副節に関しては [SS, Chap. 5 §4] を参照せよ．

定理 9.2.2 は整関数の無限積表示を得るには十分役立つが, 与えられた零点を持つような関数の構成問題には, この副節で述べる Weierstrass の構成法の方がより明示的な答えを与える．

$k \in \mathbb{N}$ に対し Weierstrass の既約因子 (canonical factor) E_k を次で定義する．

$$E_k(z) \;:=\; \begin{cases} 1 - z & (k = 0) \\ (1-z)e^{z+z^2/2+\cdots+z^k/k} & (k \geq 1) \end{cases}.$$

次の補題の証明は演習問題とする．

補題 9.3.1. $|z| \leq 1/2$ ならば $|1 - E_k(z)| \leq 2e\,|z|^{k+1}$.

定理 9.3.2 (Weierstrass の因数分解定理 [SS, Theorem 4.1])**.** 数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ は $\lim_{n\to\infty} |a_n| = +\infty$ を満たすものとする ($a_n = a_m$ のような重複があってもよい).

(1) このとき零点の集合が $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ となる整関数 f であって, 零点集合が $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ となる任意の整関数は整関数 g でもって $f(z)\exp(g(z))$ と書けるものが存在する．

(2) 必要なら並べ替えて $a_0 = \cdots = a_{m-1} = 0$, $a_n \neq 0$ $(n \geq m)$ とする．すると (1) の f は次で与えられる．

$$f(z) \;=\; z^m \prod_{n=m}^{\infty} E_{n+1-m}(z/a_n).$$

証明. まず (2) の $f(z)$ が収束することを示す．簡単のため $b_k := a_{k-1+m}$ $(k \in \mathbb{Z}_{>}0)$ とすると $f(z) = z^m \prod_{k=1}^{\infty} E_k(z/b_k)$. 正の実数 R を任意に取って $|z| < R$ と仮定し, そのような任意の z について収束が示せれば良い．仮定より $|b_k| \leq 2R$ となる k は有限個．$|a_k| > 2R$ ならば $|z/b_k| \leq 1/2$ なので, 補題 9.3.1 より $|1 - E_k(z/a_k)| \leq c\,|z/a_k|^{k+1} \leq 2e/2^{k+1}$. よって補題 9.2.1より $\prod_{|b_k|\geq 2R} E_k(z/a_k)$ は収束する．以上で $f(z)$ の収束性が示せた．すると f が整関数で零点集合が $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ になるのは明らか．

(1) を示すために, f_1 と f_2 を整関数であって零点集合が $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ となるものとする．f_1/f_2 は a_n を除去可能特異点に持つので, 整関数であり, また零点は存在しない．すると次の補題 9.3.3 より $f_1(z)/f_2(z) = \exp(g(z))$ となる整関数 $g(z)$ が存在する．これで示せた． □

補題 9.3.3. f が単連結領域 Ω 上の正則関数であって零点を持たないものであれば, Ω 上の正則関数 g であって $f(z) = \exp(g(z))$ となるものが存在する．

証明は演習問題とする．

参考文献

[杉浦] 杉浦光夫, **解析入門 II**, 東京大学出版会 (1985).

[SS] E. M. Stein, R. Shakarchi, *Complex Analysis*, Princeton lectures in Analysis II, Princeton University Press (2003);
日本語訳: エリアス・M. スタイン, ラミ・シャカルチ著, 新井仁之, 杉本充, 高木啓行, 千原浩之訳, **プリンストン解析学講義 II 複素解析**, 日本評論社 (2009).

以上です.