現代数学基礎 CⅢ　11 月 21 日分小テスト解答[*1]

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp
https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida/2019WC3.html

問題. $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ とする. 関数 $f(z) := \dfrac{\cot z}{z-a}$ の全ての極を求め, その位数と留数を答えよ.

解答. $\cot z = \frac{1}{\tan z} = \frac{\cos z}{\sin z}$ より

(1) $a \notin \mathbb{Z}\pi/2$ の場合, $f(z)$ の極は $z = a$ と $z = n\pi$ $(n \in \mathbb{Z})$. 全て位数は 1 で, 留数は

$$\begin{aligned}
\operatorname*{Res}_{z=a} f(z) &= \lim_{z\to a}(z-a)f(z) = \lim_{z\to a}\cot z = \cot a, \\
\operatorname*{Res}_{z=n\pi} f(z) &= \lim_{z\to n\pi}(z-n\pi)f(z) = \lim_{z\to n\pi}\frac{\cos z}{z-a}\frac{z-n\pi}{\sin z} = \frac{\cos n\pi}{n\pi-a}\cdot\left.\frac{1}{(\sin z)'}\right|_{z=n\pi} \\
&= \frac{\cos n\pi}{n\pi-a}\frac{1}{\cos n\pi} = \frac{1}{n\pi-a}.
\end{aligned}$$

(2) $a \in (\mathbb{Z}\pi/2) \setminus (\mathbb{Z}\pi)$, つまり π の半整数倍の場合, $f(z)$ の極は $z = n\pi$ $(n \in \mathbb{Z})$ のみ ($z = a$ は除去可能特異点). 位数は全て 1 で, 留数は (1) と同様の計算で $\operatorname{Res}_{z=n\pi} f(z) = (n\pi - a)^{-1}$.

(3) $a \in \mathbb{Z}\pi \setminus \mathbb{Z} = \mathbb{Z}\pi \setminus \{0\}$, つまり π の整数倍であって 0 ではない場合, $a = m\pi$ と書くと $f(z)$ の極は $z = n\pi$ $(n \in \mathbb{Z})$. 位数は $n \neq m$ なら 1, $n = m$ なら 2 で, 留数は

$$\begin{aligned}
\operatorname*{Res}_{z=n\pi} f(z) &= \text{(1) と同様の計算} = \frac{1}{n\pi-m\pi}, \\
\operatorname*{Res}_{z=m\pi} f(z) &= \lim_{z\to m\pi}\frac{d}{dz}\Big((z-m\pi)^2 f(z)\Big) = \lim_{z\to m\pi}\frac{d}{dz}\Big((z-m\pi)\cot z\Big) = \lim_{z\to m\pi}\Big(\cot z - \frac{z-m\pi}{\sin^2 z}\Big) \\
&= \lim_{z\to m\pi}\frac{\sin z\cos z-(z-m\pi)}{\sin^2 z} \overset{(*)}{=} \lim_{z\to m\pi}\frac{(\cos^2 z-\sin^2 z)-1}{2\sin z\cos z} \\
&= \lim_{z\to m\pi}\frac{\cos 2z-1}{\sin 2z} \overset{(*)}{=} \lim_{z\to m\pi} -\frac{2\sin 2z}{2\cos 2z} = 0.
\end{aligned}$$

但し $*$ はロピタルの定理を用いた.

コメント. 3 点満点で採点しました. 平均点は 0.5 点でした. 基本的な問題なので, 必ずできるようにして下さい.

以上です.

[*1] 2019/11/22, ver. 0.1.