現代数学基礎 CⅢ　11 月 21 日分演習問題[*1]

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp
https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida/2019WC3.html

8　有理型関数

8.1　孤立特異点

問題 8.1 ([今吉, 例題 6.2])**.** 以下の関数の $z = 0$ での特異点の種類を調べよ. 但し n は正の整数とする.
(1) $(\sin z)/z$　(2) $(\cos z)/(z-n)$　(3) $\exp(1/z^2)$.

8.2　有理型関数

問題 8.2. 開集合 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 上の有理型関数全体の集合 $K(\Omega)$ は関数の四則演算 (加減乗除) で閉じている[*2] ことを示せ. つまり, 任意の $f, g \in K(\Omega) \setminus \{0\}$ に対して $f+g, f-g, fg, f/g$ もまた有理型関数であることを示せ.

8.3　偏角の原理

問題 8.3 (代数学の基本定理の別証明 [今吉, 例題 5.4])**.** Liouville の定理の応用として定理 6.2.2 で次の代数学の基本定理を証明した: 定数でない複素数係数多項式 $P(z) = a_n z^n + \cdots + a_0$ は複素数の根を持つ. 最大値の原理 (定理 8.3.4) を関数 $f := 1/P$ に適用することで, この主張の別証を与えよ.

8.4　その他の問題

問題 8.4. 留数定理を用いて以下の実積分の値を求めよ.
(1) a は正の実数として
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4 + a^4}\, dx.$$
(2) n を正の整数として
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^4 + 1)^n}\, dx.$$

問題 8.5. 留数定理を用いて次の実積分の値を求めよ. 但し a, b ともに正の実数とする.
(1)
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos bx}{x^2 + a^2}\, dx.$$
(2)
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos bx}{x^4 + x^2 + 1}\, dx.$$

[*1] 2019/07/07 版, ver. 0.1.
[*2] 代数学の言葉遣いを用いると, $K(\Omega)$ は体をなす, ということです.

問題 8.6. 図 8.1 の積分路上での複素積分を用いて, 次の実積分の値を求めよ. 但し a は $0 < a < 1$ なる実数とする.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx.$$

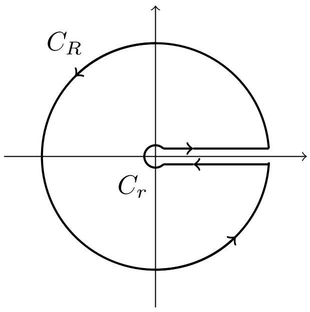

図 8.1　問題 8.6 の積分路

問題 8.7 (Fresnel[*3]積分)**.** 図 8.2 の積分路上での複素積分を用いて, 次の実積分の値を求めよ.

$$\int_0^{\infty} \cos x^2 dx, \qquad \int_0^{\infty} \sin x^2 dx.$$

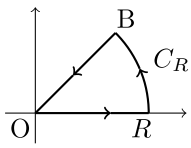

図 8.2　問題 8.7 の積分路

レポート問題

レポート問題 8.1. Riemann 球面がコンパクト位相空間であることを示せ.

参考文献

[今吉] 今吉洋一, **複素関数概説**, サイエンス社 (1997).

以上です.

[*3] カタカナだとフレネル.