現代数学基礎 CⅢ　11 月 21 日分演習解答[*1]

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp
https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida/2019WC3.html

8　有理型関数

8.1　孤立特異点

問題 8.1.　(1) $z=0$ は除去可能な特異点. (2) $z=0$ は m 位の極.
(3) $z \to \pm 0$ で極限が違うので, $z=0$ は真性特異点.

8.2　有理型関数

問題 8.2. $\{z_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ と $\{w_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ をそれぞれ f と g の極の集合とすると, $f \pm g$ および fg の極の集合は $\{z_n\} \cup \{w_n\}$ に含まれる. $\{z_n\} \cup \{w_n\}$ は集積点を持たないので, $f \pm g$ および fg は有理型関数である.

また $\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ を g の零点の集合とする. この集合が集積点を持つ場合は, 一致の原理より $g=0$ なので, 考慮しなくて良い. すると f/g の極の集合は $\{z_n\} \cup \{u_n\}$ に含まれる. 後は前半と同じの議論で, f/g が有理型関数であることが分かる.

8.3　偏角の原理

問題 8.3. P を次数 $n>0$ の多項式とする. 十分大きい $R \in \mathbb{R}$ を取れば, $|z|>R$ なら $|P(z)| > |z^n|/2 > R^n/2$ となる. P が零点を持たないと仮定すると $f := 1/P$ は整関数で, $|z|>R$ なら $|f(z)| < 2/R^n$ となる. 更に $|f(0)| > 2/R^n$ となるように R を大きく取り直せば, $|f|$ が連続関数であることから $|f|$ は最大値を取る. よって最大値の原理より f は定数関数になり, 矛盾する.

8.4　その他の問題

問題 8.4.　(1) 原点中心で半径 $R \gg 0$ の上半平面内の半円に正の向きを入れた C_R と, 実軸上の閉区間 $[-R,R]$ からなる積分路 C で関数 $1/(z^4+a^4)$ を C を積分すると $\int_C \frac{dz}{z^4+a^4} = \int_{-R}^{R} \frac{dx}{x^4+a^4} + \int_{C_R} \frac{dz}{z^4+a^4}$. C の内部で関数 $1/(z^4+a^4)$ は $\alpha = ae^{\pi i/4}$ と $\beta = ae^{3\pi i/4}$ において 1 位の極を持つから, 留数定理より

$$\int_C \frac{dz}{z^4+a^4} = \operatorname*{Res}_{z=\alpha} \frac{2\pi i}{z^4+a^4} + \operatorname*{Res}_{z=\beta} \frac{2\pi i}{z^4+a^4} = \frac{2\pi i}{4\alpha^3} + \frac{2\pi i}{4\beta^3} = \frac{2\pi i}{4a^3}\left(e^{-3\pi i/4} + e^{-9\pi i/4}\right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}a^3}.$$

(2) (1) で $b := a^4$ として $\int_0^\infty \frac{dx}{x^4+b} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^4+b} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} b^{-3/4}$. 両辺を b で n 回微分して

$$(-1)^n n! \int_0^\infty \frac{dx}{(x^4+b^n)} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\left(-\frac{3}{4}\right)\left(-\frac{3}{4}-1\right)\cdots\left(-\frac{3}{4}-n+1\right) b^{-3/4-n}.$$

[*1] 2019/07/17 版, ver. 0.1.

$b=1$ とすれば
$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^4)^n} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\frac{3\cdot 7\cdot\cdots\cdot(4n-1)}{4^n n!}.$$

問題 8.5. (1) 前問 8.4 (1) と同様に, 原点中心で半径 $R \gg 0$ の上半平面内の半円に正の向きを入れた C_R と, 実軸上の閉区間 $[-R,R]$ からなる積分路 C をとり, その上で積分 $\int_C \frac{e^{ibz}}{z^2+a^2}dz = \int_{-R}^R \frac{e^{ibx}}{x^2+a^2}dx + \int_{C_R} \frac{e^{ibz}}{z^2+a^2}dz$ を考える. 被積分関数の C 内の極は $z=ia$ のみなので, 留数定理より $\int_C \frac{e^{ibz}}{z^2+a^2}dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=ia} e^{ibz}/(z^2+a^2) = \pi e^{-ab}/a$. 一方で C_R 上の積分は $z=Re^{i\theta}$ と変数変換して
$$\left|\int_{C_R}\frac{e^{ibz}}{z^2+a^2}dz\right| = \left|\int_0^\pi \frac{e^{ibR(\cos\theta+i\sin\theta)}}{R^2e^{2i\theta}+a^2}Rie^{i\theta}d\theta\right| \le R\int_0^\pi \frac{e^{-bR}}{R^2-a^2}d\theta = \frac{2\pi R}{R^2-a^2}$$
と評価できるので, $R\to\infty$ で $\int_{C_R}\to 0$. 以上より求める積分は $\int_0^\infty \frac{\cos bx}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos bx}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{2}\operatorname{Re}\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{ibx}}{x^2+a^2}\,dx = \frac{\pi e^{-ab}}{2a}$.

(2) 同じ積分路 C をとって積分 $J := \int_C e^{ibz}/(z^4+z^2+1)dz$ を考える. C_R での積分は上と同様の評価ができて, $R\to\infty$ で 0 に収束することが分かる. C 内の極は $\alpha = e^{\pi i/3}$ と $\beta = e^{2\pi i/3}$ なので
$$\begin{aligned} J &= 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=\alpha}\frac{e^{ibz}}{z^4+z^2+1} + 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=\beta}\frac{e^{ibz}}{z^4+z^2+1} = 2\pi i\frac{e^{ib\alpha}}{4\alpha^3+2\alpha} + 2\pi i\frac{e^{ib\beta}}{4\beta^3+2\beta} \\ &= \frac{-2\pi i}{2\sqrt{3}}e^{-b\sqrt{3}/2}e^{-i(b/2+\pi/6)} + \frac{2\pi i}{2\sqrt{3}}e^{-b\sqrt{3}/2}e^{i(b/2+\pi/6)} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}e^{-b\sqrt{3}/2}\sin\Bigl(\frac{b}{2}+\frac{\pi}{6}\Bigr). \end{aligned}$$
従って求める積分は
$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos bx}{x^4+x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\operatorname{Re}(J) = \frac{\pi}{\sqrt{3}}e^{-b\sqrt{3}/2}\sin\Bigl(\frac{b}{2}+\frac{\pi}{6}\Bigr).$$

問題 8.6. $e^x = t$ と変数変換すると $\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{ax}}{1+e^x}dx = \int_0^\infty \frac{t^a}{1+t}\frac{dt}{t} = \int_0^\infty \frac{t^{a-1}}{1+t}dt$.

問題の積分路 C 上で関数 $z^{a-1}/(1+z)$ を積分すると, $z^{a-1} = e^{(a-1)\log z}$ の分岐に気を付けて $\int_C \frac{z^{a-1}}{1+z}dz = \int_{C_R}\frac{z^{a-1}}{1+z}dz + \int_{C_r}\frac{z^{a-1}}{1+z}dz + \int_r^R \frac{t^{a-1}}{1+t}dt + \int_R^r \frac{e^{2\pi i(a-1)}t^{a-1}}{1+t}dt$. まず C 内の被積分関数の極は $z=-1$ のみだから $\int_C \frac{z^{a-1}}{1+z}dz = 2\pi i\operatorname{Res}_{z=-1} z^{a-1}/(1+z) = 2\pi i e^{(a-1)\log(-1)} = -2\pi i e^{a\pi i}$. 次に C_R 上の積分について $\left|\int_{C_R}\frac{z^{a-1}}{1+z}dz\right| \le \left|\int_0^{2\pi}\frac{R^{a-1}e^{i\theta(a-1)}}{1+Re^{i\theta}}Rie^{i\theta}d\theta\right| \le \int_0^{2\pi}\frac{R^a}{R-1}d\theta = 2\pi R^a/(R-1)$. $R\to\infty$ で $R^a/(R-1)\to 0$ なので, $\int_{C_R}$ も $R\to\infty$ で 0 に収束する. 同様に C_r 上の積分も $\left|\int_{C_r} z^{a-1}/(1+z)\,dz\right| \le 2\pi r^a/(1-r)$ と評価できて, $r\to 0$ で 0 に収束することが分かる. 最後に $\int_r^R \frac{t^{a-1}}{1+t}dt + \int_R^r \frac{e^{2\pi i(a-1)}t^{a-1}}{1+t}dt = (1-e^{2\pi ia})\int_r^R \frac{t^{a-1}}{1+t}dt$ は $r\to 0$, $R\to\infty$ で $(1-e^{2\pi ia})\int_0^\infty \frac{t^{a-1}}{1+t}dt$ に収束する. 以上より
$$\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{ax}}{1+e^x}dx = \frac{-2\pi i e^{a\pi i}}{1-e^{2\pi ia}} = \frac{\pi}{\sin a\pi}.$$

問題 8.7. 積分路の弧の部分を C_R と書くと $\int_C e^{-z^2}\,dz = \int_0^R e^{-x^2}\,dx + \int_{C_R} e^{-z^2}\,dz + \int_{\mathrm{BO}} e^{-z^2}\,dz$. C の内部で被積分関数は正則だから $\int_C e^{-z^2}\,dz = 0$. また $\left|\int_{C_R} e^{-z^2}\,dz\right| \le \int_0^{\pi/4} e^{-R^2}R\,d\theta = \pi Re^{-R^2}/4$ と評価できるので, $R\to\infty$ で $\int_{C_R} e^{-z^2}\,dz \to 0$. 一方で積分路のうち辺 BO 上の積分は $z = r\exp(\pi i/4)$ と置換すれば $\int_{\mathrm{BO}} e^{-z^2}\,dz = \int_R^0 \exp(-(re^{\pi i/4})^2)\exp(\pi i/4)\,dr = -\frac{1+i}{\sqrt{2}}\int_0^R e^{-ir^2}dr = -\frac{1+i}{\sqrt{2}}\Bigl(\int_0^R \cos r^2\,dr - i\int_0^R \sin r^2\,dr\Bigr)$. よって $R\to\infty$ とすれば $\int_0^\infty \cos r^2\,dr - i\int_0^\infty \sin r^2\,dr = \frac{\sqrt{2}}{1+i}\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} - i\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$. 実部と虚部を比較して
$$\int_0^\infty \cos x^2\,dx = \int_0^\infty \sin x^2\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

以上です.