現代数学基礎 CIII　11 月 21 日分講義ノート[*1]

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp
`https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida/2019WC3.html`

8　有理型関数

前回までと同様, 複素数値関数のことを単に関数と呼ぶ. また開集合または閉集合といったら §1.1 の意味での $\mathbb{C}$ の開集合または閉集合のことを意味するものとする.

今回は [SS, Chapter 3 §3] に基づいて有理型関数を扱う. 教科書 [今吉, §6.1.2, §6.4, §5.3.1] も参照せよ.

8.1　孤立特異点

定義. $z_0 \in \mathbb{C}$ が関数 f の**孤立特異点** (isolated singularity) とは, z_0 の近傍 U があって $U \setminus \{z_0\}$ 上で f は定義されているが z_0 では f が定義されていないもののことをいう.

前回扱った極や除去可能な特異点は孤立特異点の例である.

命題 8.1.1. $z_0 \in \mathbb{C}$ を関数 f の孤立特異点とする. このとき

$$z_0 \text{ は } f \text{ の極} \iff z \to z_0 \text{ で } |f(z)| \to \infty.$$

証明. z_0 が極なら $1/f$ は z_0 を零点に持つので, $z \to z_0$ で $1/|f(z)| \to 0$ である. 逆に $z \to z_0$ で $|f(z)| \to \infty$ だと仮定すると, $1/f$ は z_0 の近傍で有界で $1/|f(z)| \to 0$ なので, §7.3 の命題より $1/f$ は z_0 で除去可能な特異点を持つ. よって $1/f(z)$ は $z = z_0$ で 0 になる. つまり z_0 で f は極を持つ. □

そこで孤立特異点を以下のように分類しよう.

定義. 除去可能な特異点でもなく極でもない孤立特異点を**真性特異点** (essential singularity) と呼ぶ.

補題 8.1.2. 関数 $e^{1/z}$ は $z = 0$ を真性特異点に持つ.

証明. z が $z \in \mathbb{R}_{>0}$ のまま 0 に近づくときは $e^{1/z} \to \infty$. 一方 z が $z \in \mathbb{R}_{<0}$ のまま 0 に近づくときは $e^{1/z} \to 0$. 従って除去可能な特異点でも極でもない. □

真性特異点は "その他" の孤立特異点として定義したが, 写像としてみると次の定理 8.1.3 のような性質を持つ.

定義. 部分集合 $S \subset \mathbb{C}$ が**稠密** (dense) であるとは, 任意の $z \in \mathbb{C}$ と任意の $r \in \mathbb{R}_{>0}$ に対し $D_r(z) \cap S \neq \emptyset$ となることをいう.

定理 8.1.3 (Casorati-Weierstrass)**.** f は穴あき円板 $D_r^*(z_0) := D_r(z_0) \setminus \{z_0\}$ 上の正則関数であって z_0 を真性特異点にもつものとする. このとき像 $f(D_r^*(z_0)) \subset \mathbb{C}$ は稠密である.

[*1] 2019/11/21, ver. 0.3.

証明. 背理法で示す. f の像が稠密でないとすると, $w \in \mathbb{C}$ と $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ が存在して, 任意の $z \in D_r^*(z_0)$ に対して $|f(z) - w| > \delta$. 従って $D_r^*(z_0)$ 上の関数

$$g(z) := (f(z) - w)^{-1}$$

が定義できて, これは正則かつ $|g(z)| < 1/\delta$ となる. よって §7.3 の命題より g は z_0 で除去可能な特異点を持つ. もし $g(z_0) \neq 0$ なら $f(z) - w$ は z_0 で正則になり, 仮定と矛盾する. $g(z_0) = 0$ なら $f(z) - w$ は z_0 で極を持ち, やはり仮定と矛盾する. □

8.2　有理型関数

定義. 関数 f が開集合 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 上**有理型** (meromorphic) であるとは, Ω 内に集積点を持たない点列 $\{z_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \Omega$ であって以下の二条件を満たすものが存在することをいう.

(i) f は $\Omega \setminus \{z_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ 上で正則.
(ii) f は各 z_n $(n \in \mathbb{N})$ を極に持つ.

有理型関数は $\mathbb{C}$ 内で考えるより次のように拡張された複素数平面で考えた方が自然な対象である.

定義. (1) 関数 f が**無限遠で正則である**とは, $F(z) := f(1/z)$ が $z = 0$ で正則関数であることをいう. 同様に f が**無限遠で極を持つ**とは, $F(z) := f(1/z)$ が $z = 0$ で極を持つことをいう. また**無限遠で除去可能特異点を持つ**, および**無限遠で真性特異点を持つ**ことも同様に定義できる.
(2) 関数 f が**拡張された複素数平面で有理型**であるとは, f が $\mathbb{C}$ 上の有理型関数であって, かつ無限遠で正則または無限遠で極を持つことをいう.

定理 8.2.1. 拡張された複素数平面で有理型である関数は有理関数である.

証明. f は拡張された複素数平面で有理型だと仮定する. $f(1/z)$ は $z = 0$ で極または除去可能な特異点を持つから, 適当な $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ があって, 穴あき円板 $D_\varepsilon^*(0)$ 上で $f(1/z)$ は正則である. すると $f(z)$ は有界閉集合 $\overline{D_{1/\varepsilon}(0)}$ で有理型だから, 定理 6.5.1 ($\mathbb{C}$ において有界閉集合であることとコンパクトであることは同値) より $\overline{D_{1/\varepsilon}(0)}$ における極の数は有限個. それらを $z_1, \ldots, z_n$ と名付ける. 各 z_k における $f(z)$ の主部 (定義 7.1.6) を $f_k(z)$ と書き, また $f(1/z)$ の $z = 0$ における主部を $f_\infty(z)$ と書く. すると

$$F(z) = f(z) - f_\infty(1/z) - \sum_{k=1}^{n} f_k(z)$$

は整関数かつ有界. すると定理 6.2.1 (Liouville の定理) より F は定数関数である. 以上より $f(z)$ は有理関数である. □

"拡張された複素数平面" を次のように幾何学的に理解することもできる.

定義. 中心 $(0, 0, 1/2)$, 半径 $1/2$ の 2 次元球面 $\mathbb{S} := \{(X, Y, Z) \in \mathbb{R}^3 \mid X^2 + Y^2 + (Z - 1/2)^2 = 1/4\}$ とその上の点 $N := (0, 0, 1)$ を考える. $\mathbb{S}$ と $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ との全単射 $p : \mathbb{S} \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ を

$$p(X, Y, Z) := \begin{cases} \frac{X}{1-Z} + i\frac{Y}{1-Z} & (X, Y, Z) \neq (0, 0, 1) \\ \infty & (X, Y, Z) = (0, 0, 1) \end{cases}$$

と定義する．この写像は $\mathbb{S}\setminus\{N\}$ 上では連続写像である．そこで $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ の位相を

$$U\subset\mathbb{C}\cup\{\infty\}\text{ が開集合 }:\Longleftrightarrow\ p^{-1}(U)\text{ が }\mathbb{S}\text{ の Euclid 位相に関して開集合}$$

と定義することで $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ を位相空間とみなしたものを **Riemann 球面**と呼ぶ.

8.3　偏角の原理

定理 8.3.1 (**偏角の原理** [今吉, 定理 6.3])**.** 円 C とその内部を含む開集合 $\Omega\subset\mathbb{C}$ と, Ω 上の有理型関数 f を考える．もし f が C 上で極も零点も持たなければ

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C^+}\frac{f'(z)}{f(z)}dz\ =\sum_{z:C\text{ の内部にある }f\text{ の零点}}\operatorname{ord}(z)-\sum_{z:C\text{ の内部にある }f\text{ の極}}\operatorname{ord}(z).$$

但し積分路 C^+ は C に正の向き付けをしたものとする.

証明. f が z_0 で n 位の零点を持つなら, z_0 の近傍で $f(z)=(z-z_0)^n g(z)$ とかけて, $f'(z)/f(z)=n/(z-z_0)+g'(z)/g(z)$ となる．g'/g は $z=z_0$ で正則だから, f'/f は z_0 で 1 位の極を持ち, 留数は n である．同様に, f が z_0 で n 位の極を持つなら, $f'(z)/f(z)=-n/(z-z_0)+g'(z)/g(z)$ と書けて, f'/f は z_0 で 1 位の極を持ち, 留数は $-n$ である．あとは留数定理を用いればよい. □

注意. (1) 証明から分かるように, この定理の主張は円周以外の単純閉曲線についても成り立つ.

(2) 偏角の原理という名前は, 複素数 w の偏角を $\arg(w)$ と書くと, $[f'(z)/f(z)]\,dz = d\log f(z) = d\log|f(z)|+i d\arg(f(z))$ より $n_I=(2\pi)^{-1}\int_C d\arg(f(z))$ と書き直せることに由来する.

定理 8.3.2 (**Rouché の定理** [今吉, 定理 6.4])**.** 円周 C とその内部を含む開集合 $\Omega\subset\mathbb{C}$ と, Ω 上の正則関数 f,g を考える．もし任意の $z\in C$ に対し $|f(z)|>|g(z)|>0$ ならば,

$$\sum_{z:C\text{ の内部にある }f+g\text{ の零点}}\operatorname{ord}(z)\ =\sum_{w:C\text{ の内部にある }f\text{ の零点}}\operatorname{ord}(w).$$

証明. $t\in[0,1]\subset\mathbb{R}$ に対して $f_t(z):=f(z)+tg(z)$ と定め, C の内部における f_t の重複度を込めた零点の個数を n_t と定める．n_t が t に依存しないことを証明すればよい．$n_t\in\mathbb{N}$ だから, そのためには n_t が t の連続関数であることを示せば十分.

C 上で $|f(z)|>|g(z)|$ なので f_t は C 上では零点を持たない．従って偏角の原理 (定理 8.3.1) が適用できて

$$n_t\ =\ \frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f_t'(z)}{f_t(z)}dz.$$

被積分関数の $f_t'(z)/f_t(z)$ は $(z,t)\in C\times[0,1]$ に関する連続関数なので, 上の積分表示より n_t も連続関数である．これで証明が終わった. □

偏角の原理の別の応用として, 正則写像の幾何学的性質である開写像定理 (open mapping theorem) 及び最大値の原理 (maximum modulus principle) を説明する.

定理 8.3.3 (複素解析における**開写像定理** [今吉, 定理 5.8])**.** 開集合 $\Omega\subset\mathbb{C}$ 上の定数でない正則関数 f は開写像である．つまり任意の開集合 $U\subset\Omega$ の像 $f(U)\subset\mathbb{C}$ はまた開集合である.

証明. $w_0 = f(z_0)$ を任意に取って, w_0 の近傍の点 w が像に含まれることを示せばよい. $g(z) := f(z) - w$ を

$$g(z) = F(z) + G(z), \quad F(z) := f(z) - w_0, \quad G(z) := w_0 - w$$

と分解する. $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ を $D := D_\delta(z_0) \subset \Omega$ かつ $\overline{D} \setminus \{0\}$ 上 $f(z) \neq w_0$ なるものとする. 次に $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ を任意の $z \in \partial D$ に対して $|f(z) - w_0| \geq \varepsilon$ となるようにとる. もし $|w - w_0| < \varepsilon$ なら $z \in \partial D$ に対して $|F(z)| > |G(z)|$ なので, Rouché の定理 8.3.2 より $g = F + G$ と F の零点の個数は同じ. δ の取り方より $F(z)$ は $z = z_0$ のみで零点を持つから, $g(z)$ も 1 つのみ零点を持つ. これで示せた. □

なお教科書 [今吉] では偏角の原理を使わずに開写像定理を証明している.

次の最大値の原理は非常に有用な定理で, この講義でも, 例えば §12.3 で Riemann の写像定理の証明をするときに用いることになる.

定理 8.3.4 (複素解析における**最大値の原理** [今吉, 定理 5.9])**.** f を開集合 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 上の定数でない正則関数とする. このとき関数 $|f|$ は Ω で最大値を持たない.

証明. もし $z_0 \in \Omega$ で f が最大値をとるなら, $D = D_r(z_0)$ を $D \subset \Omega$ なる円板として, 開写像定理より $f(D)$ は $f(z_0)$ を含む開集合である. すると $z \in D$ であって $|f(z)| > |f(z_0)|$ となるものが存在することになり矛盾する. □

次の系は §11.2 で単位円板の自己同型を考えるときに用いることになる.

系 8.3.5. $\Omega \subset \mathbb{C}$ をコンパクトな閉包 $\overline{\Omega}$ を持つ領域とする. f が Ω で正則かつ $\overline{\Omega}$ で連続ならば

$$\sup_{z \in \Omega} |f(z)| \leq \sup_{z \in \overline{\Omega} \setminus \Omega} |f(z)|.$$

証明. 実数値関数 $|f(z)|$ はコンパクト集合 $\overline{\Omega}$ で連続なので最大値を取る. 最大値の原理より, f が定数関数でなければ, その最大値は Ω 内では起きえない. f が定数関数の場合は自明な主張である. □

参考文献

[今吉] 今吉洋一, **複素関数概説**, サイエンス社 (1997).

[SS] E. M. Stein, R. Shakarchi, *Complex Analysis*, Princeton lectures in Analysis Ⅱ, Princeton University Press (2003);
日本語訳: エリアス・M. スタイン, ラミ・シャカルチ著, 新井仁之, 杉本充, 高木啓行, 千原浩之訳, **プリンストン解析学講義 Ⅱ 複素解析**, 日本評論社 (2009).

以上です.