

現代数学基礎 CIII 11月14日分小テスト解答*1

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)

yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp

<https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida/2019WC3.html>

問題. n を正の整数とする. 複素関数 $(1-z)^{-n}$ の $z=0$ での Taylor 展開を求めよ.

解答. $f(z) := (1-z)^{-n}$ は $z=0$ を中心とする半径 $r < 1$ の開円板上での正則関数. よって $z=0$ で Taylor 展開できて $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k f^{(k)}(0)/k!$. ここで

$$f^{(k)}(z) = (1-z)^{-n-k} \cdot n(n+1) \cdots (n+k-1) = (1-z)^{-n-k} \cdot k! \binom{k+n-1}{n-1}.$$

但し $\binom{a}{b} = {}_a C_b$ は二項係数. 従って

$$\frac{1}{(1-z)^n} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n-1+k}{k} z^k.$$

コメント. 3点満点で採点しました. 平均点は1.5点でした.

一般二項定理ですね. この問題で必要な微分の計算は高校生で習うものなので, 必ずできるようにしてください.

以上です.

*1 2019/11/14, ver. 0.1.