現代数学基礎 CIII　11 月 14 日分演習問題[*1]

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp
https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida/2019WC3.html

7 留数定理

7.1 Laurent 展開

問題 7.1. 以下の関数を括弧内の点を中心にして Laurent 展開せよ.

(1) $2z/(z^2+1)$ $[z=i]$　(2) $2z/(z^2+1)$ $[z=a$ (実数)$]$.

問題 7.2. 以下の関数を $z=0$ を中心にして Laurent 展開せよ.

(1) $1/\big(z(z^2+1)\big)$　(2) $ze^{1/z}$　(3) $(\sin z)/z^2$.

7.2 留数定理

問題 7.3. 以下の関数を円 $|z|=2$ に正の向きを付けた積分路上で積分せよ.

(1) $z/(z-1)$　(2) $(\cos z)/z$　(3) $(2z-1)/(z^2-z)$.

問題 7.4 ([今吉, 例題 6.7])**.** 留数定理を用いて次の実積分を計算せよ. 但し a は 1 より大きい実数とする.

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a+\cos\theta}\, d\theta.$$

問題 7.5. a を実数とする.

(1) $|a|<1$ と仮定し[*2], また t を $|t|<1$ なる複素数とする. 次の積分の値を求めよ.

$$K := \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta}\, d\theta}{(1-te^{i\theta})(e^{i\theta}-a)(1-ae^{i\theta})}.$$

(2) K を t について展開することで, $|a|<1$ の場合[*3]に次の等式を示せ.

$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{in\theta}\, d\theta}{1-2a\cos\theta+a^2} = \frac{2\pi a^n}{1-a^2}$$

(3) 次の等式を示せ.

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos(n\theta)\, d\theta}{1-2a\cos\theta+a^2} = \begin{cases} 2\pi a^n/(1-a^2) & (|a|<1) \\ 2\pi/\big(a^n(a^2-1)\big) & (|a|>1) \end{cases}$$

問題 7.6 ([今吉, 例題 6.8 (1)])**.** 次の実積分を考える.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi.$$

これは $x=\tan\theta$ と変数変換すれば実解析で求まるが, ここでは留数定理を用いて導出する.

簡単のため $f(z) := (1+z^2)^{-1}$ とおく. まず図 7.1 のような半円部分 C_R と直線部分 $[-R,R]$ からなる積分路 C を考え, その上での複素積分 $\int_C f(z)dz$ を考える.

[*1] 2019/11/14, ver. 0.2.

[*2] ver. 0.2 で訂正しました

[*3] ver. 0.2 で訂正しました

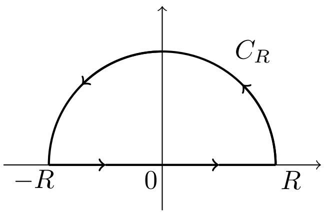

図 7.1　問題 7.6 の積分路

C が二つの部分に分かれるのに対応して

$$\int_C f(z)\,dz = I_R + \int_{C_R} f(z)\,dz, \quad I_R := \int_{-R}^{R} f(x)\,dx \tag{7.1}$$

となる．求めたいのは $I := \lim_{R\to\infty} I_R$ である．そこで $\int_C f(z)dz$ と $\int_{C_R} f(z)dz$ を考えることにする．

(1) $\int_C f(z)dz$ を計算し, R に依存しないことを確認せよ.
(2) $\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)dz = 0$ を示せ.
(3) 等式 (7.1) と (1) および (2) から $I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \pi$ を導け.

レポート問題

レポート問題 7.1 ([SS, Chap. 2, Problem 2])**.** 正の整数 n に対しその約数の数を $d(n)$ と書く．次の関数 $F(z)$ を考える.

$$F(z) := \sum_{n=1}^{\infty} d(n)z^n.$$

(1) 等式 $F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^n/(1-z^n)$ を示せ.
(2) 適当な正の実数 c が存在して, $0 < r < 1$ なる任意の実数 r に対して以下の不等式が成立することを示せ.

$$|F(r)| \geq \frac{c}{1-r}\log(1/(1-r)).$$

(3) p/q を正の有理数とする．適当な正の実数 $c_{p/q}$ が存在して, $r < 1$ かつ 1 に十分近い任意の実数 r に対して[*4] 以下の不等式が成立することを示せ.

$$\left|F(re^{2\pi ip/q})\right| \geq \frac{c_{p/q}}{1-r}\log(1/(1-r)).$$

(4) F は単位円 $|z| = 1$ の外側には解析接続できないことを示せ.

参考文献

[今吉] 今吉洋一, **複素関数概説**，サイエンス社 (1997).

[SS] E. M. Stein, R. Shakarchi, *Complex Analysis*, Princeton lectures in Analysis Ⅱ, Princeton University Press (2003);
日本語訳: エリアス・M. スタイン, ラミ・シャカルチ著, 新井仁之, 杉本充, 高木啓行, 千原浩之訳, **プリンストン解析学講義 Ⅱ 複素解析**, 日本評論社 (2009).

以上です.

[*4] ver. 0.3 で訂正しました.