現代数学基礎 CⅢ　11 月 14 日分演習解答[*1]

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp
https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida/2019WC3.html

7　留数定理

7.1　Laurent 展開

問題 7.1.　(1) $2z/(z^2+1) = 1/(z-i) + 1/(z+i)$ と部分分数分解する. $|z-i| < 2$ の場合は

$$\frac{2z}{z^2+1} = \frac{1}{z-i} + \frac{1}{2i+(z-i)} = \frac{1}{z-i} + \frac{1}{2i}\sum_{n\geq 0}\Bigl(-\frac{z-i}{2i}\Bigr)^n = \frac{1}{z-i} + \sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{(2i)^{n+1}}(z-i)^n.$$

$|z-i| > 2$ の場合は

$$\frac{2z}{z^2+1} = \frac{1}{z-i} + \frac{1}{2i+(z-i)} = \frac{1}{z-i} + \frac{1}{z-i}\sum_{n\geq 0}\Bigl(\frac{-2i}{z-i}\Bigr)^n = \frac{1}{z-i} + \sum_{n\geq 0}\frac{(-2i)^n}{(z-i)^{n+1}}.$$

(2) $|z-a| < |a \pm i|$ の時は

$$\begin{aligned}\frac{2z}{z^2+1} &= \frac{1}{a-i+(z-a)} + \frac{1}{a+i+(z-a)} = \sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{(a-i)^{n+1}}(z-a)^n + \sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{(a+i)^{n+1}}(z-a)^n \\ &= \sum_{n\geq 0}(-1)^n\left((a-i)^{-n-1} + (a+i)^{-n-1}\right)(z-a)^n.\end{aligned}$$

$|z-a| > |a \pm i|$ の時は

$$\begin{aligned}\frac{2z}{z^2+1} &= \frac{1}{a-i+(z-a)} + \frac{1}{a+i+(z-a)} = \sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n(a-i)^n}{(z-a)^{n+1}} + \sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n(a+i)^n}{(z-a)^{n+1}} \\ &= \sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n\left((a-i)^n + (a+i)^n\right)}{(z-a)^{n+1}}.\end{aligned}$$

問題 7.2.　(1) $1/z(z^2+1) = 1/z - z/(z^2+1)$ と部分分数分解する. $|z| < 1$ の場合は

$$\frac{1}{z(z^2+1)} = \frac{1}{z} - \frac{z}{z^2+1} = \frac{1}{z} - z\sum_{n\geq 0}(-1)^n z^{2n} = \frac{1}{z} + \sum_{n\geq 0}(-1)^{n+1}z^{2n+1}.$$

$|z| > 1$ の場合は

$$\frac{1}{z(z^2+1)} = \frac{1}{z} - \frac{z}{z^2+1} = \frac{1}{z} - \frac{1}{z}\sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{1}{z^{2n}} = \sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}\frac{1}{z^{2n+1}}.$$

(2) $ze^{1/z} = z\sum_{n\geq 0} 1/(n!z^n) = z + \sum_{n\geq 1}(n!)^{-1}z^{-n+1}$.
(3) $(\sin z)/z^2 = z^{-2}\sum_{n\geq 0}(-1)^n z^{2n+1}/(2n+1)! = z^{-1} + \sum_{n\geq 1}(-1)^n z^{2n-1}/(2n+1)!$.

[*1] 2019/11/15, ver. 0.2.

7.2 留数定理

問題 7.3. 以下の関数を円 $|z|=2$ に正の向きを付けた積分路上で積分せよ.

(1) $f(z)=z$ に留数定理を適用して $\int_{|z|=2}\frac{f(z)}{z-1}dz = 2\pi i f(1)=2\pi i.$

(2) $f(z)=\cos z$ に留数定理を適用して $\int_{|z|=2}\frac{f(z)}{z}dz = 2\pi i f(0)=2\pi i.$

(3) $(2z-1)/(z^2-z)=1/z+1/(z-1)$ と部分分数分解すると

$$\int_{|z|=2}\frac{2z-1}{z^2-z}dz = \int_{|z|=2}\frac{1}{z}dz+\int_{|z|=2}\frac{1}{z-1}dz = 2\pi i[1]_{z=1}+2\pi i[1]_{z=1} = 4\pi i.$$

問題 7.4. $z=e^{i\theta}$ と変数変換する. $d\theta=dz/(iz)$ に注意して

$$\int_0^{2\pi}\frac{1}{a+\cos\theta}d\theta = \int_{|z|=1}\frac{1}{a+(z+z^{-1})/2}\frac{dz}{iz} = \int_{|z|=1}\frac{-2i}{z^2+2az+1}dz.$$

被積分関数は $\alpha := -a+\sqrt{a^2-1}$ と $\beta := -a-\sqrt{a^2-1}$ に 1 位の極を持つ. $a>1$ より α と β は共に実数で, 積分路内にあるのは α のみ. 従って留数定理から

$$\int_0^{2\pi}\frac{1}{a+\cos\theta}d\theta = 2\pi i\operatorname*{Res}_{z=\alpha}\frac{-2i}{z^2+2az+1} = \operatorname*{Res}_{z=\alpha}\frac{4\pi}{(z-\alpha)(z-\beta)} = \frac{4\pi}{\alpha-\beta} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}.$$

問題 7.5. (1) C を単位円に正の向き付けを入れたものとし, $f(z) := 1/[(1-tz)(z-a)(1-az)]$ とすると $K = i^{-1}\int_C f(z)\,dz$. f の C の内側での極は $z=a$ だけなので $K=2\pi\operatorname{Res}_{z=a}f(z) = 2\pi/\big((1-at)(1-a^2)\big)$.

(2) K の定義から $K=\int_0^{2\pi}[\sum_{n=0}^\infty t^n e^{in\theta}/\big((e^{i\theta}-a)(e^{-i\theta}-a)\big)]\,d\theta = \sum_{n=0}^\infty K_n t^n$, $K_n := \int_0^{2\pi}[e^{in\theta}/\big((e^{i\theta}-a)(e^{-i\theta}-a)\big)]\,d\theta = \int_0^{2\pi}[e^{in\theta}/(1-2a\cos\theta+a^2)]\,d\theta$ と展開できる. 一方で (1) の結果を展開すると $2\pi/\big((1-at)(1-a^2)\big) = \sum_{n=0}^\infty t^n\cdot 2\pi a^n/(1-a^2)$. t^n の係数比較で結論を得る.

(3) $I_n := \int_0^{2\pi}[\cos(n\theta)/(1-2a\cos\theta+a^2)\,d\theta]$ とする. $|a|<1$ の場合は (2) の K_n を用いて $I_n=\operatorname{Re}K_n = 2\pi a^n/(1-a^2)$.

$|a|>1$ の場合は, (1) の計算で f の単位円内の極が $z=a^{-1}$ のみになるから $\int_C f(z)\,dz = 2\pi\operatorname{Res}_{z=a^{-1}}f(z) = 2\pi/\big((a^2-1)(1-t/a)\big)$. あとは $|a|<1$ の場合と同様に t で展開して係数比較すると $I_n = 2\pi/\big(a^n(a^2-1)\big)$.

問題 7.6. (1) C の内側では $f(z)=1/(1+z^2)$ は $z=i$ に 1 位の極を持つ. 従って留数定理から $\int_C f(z)\,dz = 2\pi i\operatorname{Res}_{z=i}(1+z^2)^{-1} = 2\pi i/(2i)=\pi$ となって R に依存しない.

(2) C_R を $z=Re^{i\theta}$, $\theta\in[0,\pi]$ とパラメータ付けする. $R\gg 1$ として,

$$\left|\int_{C_R}f(z)\,dz\right| = \left|\int_0^\pi\frac{iRe^{i\theta}}{1+R^2e^{2i\theta}}d\theta\right| \le \int_0^\pi\frac{R}{R^2-1}d\theta = \frac{\pi R}{R^2-1}$$

と評価できる. $R\to+\infty$ で $R/(R^2-1)\to 0$ なので $\int_{C_R}f(z)dz\to 0$ が示せた.

(3) 等式 $\int_C f(z)\,dz = I_R+\int_{C_R}f(z)\,dz$ は (1) から $\pi = I_R+\int_{C_R}f(z)\,dz$ と書き換えられる. この等式は任意の R について成立するから, $R\to\infty$ でも成立していて, 更に (2) を用いれば $I=\lim_{R\to\infty}I_R=\pi$ が従う.

以上です.