

現代数学基礎 CIII 11月14日分講義ノート<sup>\*1</sup>

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)

yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp

<https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida/2019WC3.html>

## 7 留数定理

前回までと同様, 複素数値関数のことを単に関数と呼ぶ. また開集合または閉集合といったら §1.1 の意味での  $\mathbb{C}$  の開集合または閉集合のことを意味するものとする.

今回は [SS, Chapter 3 §1, §2] に基づいて留数定理を扱う. 教科書 [今吉, §§6.1–6.3] も参照のこと.

### 7.1 零点と極, Laurent 展開

$\mathbb{C}$  の連結開集合のことを領域と呼んだ (§1.1).  $z_0 \in \mathbb{C}$  が関数  $f$  の零点 (zero) であるとは,  $f(z_0) = 0$  となるもののことをいう.

**定理 7.1.1.**  $f$  は領域  $\Omega$  上の正則関数で  $z_0 \in \Omega$  は  $f$  の零点とする. また  $f \neq 0$  と仮定する. このとき  $z_0$  の開近傍  $U \subset \Omega$  と  $U$  上 0 にならない正則関数  $g$  及び  $n \in \mathbb{Z}_{>0}$  が唯一存在して, 任意の  $z \in U$  に対して次が成立する.

$$f(z) = (z - z_0)^n g(z).$$

**証明.** 定理 6.1.2 (正則関数の Taylor 展開) より  $z_0$  の適当な開近傍  $U$  上で  $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$  と展開できて,  $f \neq 0$  より  $a_n \neq 0$  となる  $n$  がある. そのうち最小のものを  $n$  と書き直すと

$$f(z) = (z - z_0)^n (a_n + a_{n+1}(z - z_0) + \cdots) = (z - z_0)^n g(z)$$

と書いて,  $g$  は正則であり,  $a_n \neq 0$  より任意の  $z \in U$  について  $g(z) \neq 0$  となる.

一意性について,  $f(z) = (z - z_0)^n g(z) = (z - z_0)^m h(z)$  と二通りに表示できたとすると,  $m > n$  なら  $g(z) = (z - z_0)^{m-n} h(z)$  となり  $g(z_0) = 0$  で矛盾する. 同様に  $m < n$  でも矛盾し,  $m = n$  が分かる. すると  $g = h$  となるので, 一意性が示せた.  $\square$

系 ([今吉, 定理 5.7]). 正則関数の零点は孤立している. つまり,  $z_0$  が正則関数  $f$  の零点ならば, 十分小さい  $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$  をとると開円板  $D_{z_0}(\varepsilon)$  における  $f$  の零点は  $z_0$  のみである.

**定義 7.1.2.** 定理 7.1.1 の状況の下,  $f$  は  $z_0$  で位数  $n$  の零点 (zero of order  $n$ ) を持つ, または  $z_0$  は  $f$  の位数  $n$  の零点であるという. 特に位数が  $n = 1$  の零点を単純零点 (simple zero) と呼ぶ.

次に極の概念を導入する.  $z_0 \in \mathbb{C}$  と  $r \in \mathbb{R}_{>0}$  に対して

$$D_r^*(z_0) := D_r(z_0) \setminus \{z_0\} = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - z_0| < r\}.$$

を穴あき円板 (punctured disk) と呼ぶ.

<sup>\*1</sup> 2019/11/14, ver. 0.2.

**定義.**  $z_0 \in \mathbb{C}$  が関数  $f$  の極 (pole) である, または  $f$  が  $z_0$  において極を持つとは, ある  $r \in \mathbb{R}_{>0}$  が存在して,  $f$  が  $D_r^*(z_0)$  で定義されており, 更に  $1/f$  を  $(1/f)(z_0) := 0$  と定めることで  $D_r(z)$  上の関数とみなしたときに正則であるものをいう.

**定理 7.1.3.**  $f$  が  $z_0 \in \mathbb{C}$  で極を持つ関数なら,  $z_0$  の開近傍とその上の 0 でない正則関数  $h$  及び  $n \in \mathbb{Z}_{>0}$  が存在して, 次が成立する.

$$f(z) = (z - z_0)^{-n} h(z).$$

**証明.** 定理 7.1.1 を  $1/f$  に適用すればよい. □

**定義 7.1.4.** 定理 7.1.3 の状況の下,  $z_0$  を  $f$  の  $n$  位の極と呼び, 特に  $n = 1$  の場合は単純極 (simple pole) と呼ぶ.

**定理 7.1.5** (Laurent 展開 [今吉, 定理 6.1]).  $f$  が  $z_0$  で  $n$  位の極を持つとき,  $z_0$  の開近傍上で

$$f(z) = \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + G(z) \quad (7.1)$$

となる  $a_i \in \mathbb{C}$  及び正則関数  $G(z)$  が存在する.

**証明.** 定理 7.1.3 の  $h(z)$  を  $h(z) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k (z - z_0)^k$  と展開して代入すれば,  $a_k := A_{k-n}$ ,  $G(z) = \sum_{k=n}^{\infty} A_k (z - z_0)^{k-n}$  として結論を得る. □

**定義 7.1.6.** 定理 7.1.5 の状況の下,  $\frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z - z_0}$  を  $f$  の極  $z_0$  での主部または主要部 (principal part) と呼び, また

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) := a_{-1}$$

を  $f$  の  $z_0$  での留数 (residue) と呼ぶ. また展開 (7.1) を  $z = z_0$  での **Laurent 展開** と呼ぶ.

**定理 7.1.7.**  $f$  が  $z_0$  で位数  $n$  の極を持つとき,

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left( (z - z_0)^n f(z) \right).$$

**証明.** (7.1) より  $(z - z_0)^n f(z) = a_{-n} + \cdots + a_{-1}(z - z_0)^{n-1} + G(z)(z - z_0)^n$  なので, これを  $(n-1)$  回微分すれば結論が得られる. □

## 7.2 留数定理

**定理 7.2.1.**  $C \subset \mathbb{C}$  を正の向き of 円とし,  $z_0 \in \mathbb{C}$  を  $C$  の内部の点とする. 関数  $f$  が  $C$  とその内部を含む開集合上,  $z_0$  を除いたところで正則で, かつ  $z_0$  を極を持つなら

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) dz.$$

**証明.**  $C_\varepsilon$  を中心  $z_0$  で十分小さい半径  $\varepsilon$  の円に正の向きを入れたものとする. Cauchy の積分定理より積分路を取り換えて

$$\int_C f(z) dz = \int_{C_\varepsilon} f(z) dz$$

とできる. 線積分の定義から

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_\varepsilon} \frac{a_{-k}}{(z-z_0)^k} dz = \begin{cases} a_{-1} & (k=1) \\ 0 & (k \neq -1) \end{cases}$$

となり, また Cauchy の定理 3.2.2 より正則関数  $G(z)$  に対して  $\int_{C_\varepsilon} G(z) dz = 0$ . 従って Laurent 展開 (定理 7.1.5) より  $\int_{C_\varepsilon} f(z) dz = 2\pi i a_{-1}$  となって結論を得る.  $\square$

系 7.2.2 ([今吉, 定理 6.2]). 円  $C$  とその内部を含む開集合において,  $z_1, \dots, z_N$  で極を持ちそれ以外では正則な関数  $f$  について

$$\int_{C^+} f(z) dz = 2\pi i \sum_{i=1}^N \operatorname{Res} f(z).$$

但し  $C^+$  は  $C$  に正の向きを入れたもの.

証明.  $C_\varepsilon(z_i)$  を中心  $z_i$  半径  $\varepsilon$  の円に正の向きを入れたものとする.  $\varepsilon$  を十分小さくにとって  $C$  の内部にあるようにすれば,  $\int_{C^+} f(z) dz = \sum_{i=1}^N \int_{C_\varepsilon(z_i)} f(z) dz$  となる. あとは定理 7.2.1 を用いればよい.  $\square$

系 7.2.2 は円以外の単純閉曲線でも成立する. 定理 7.2.1 や系 7.2.2 およびその一般化を総称して留数定理と呼ぶ.

### 7.3 除去可能な特異点

定義.  $\Omega \subset \mathbb{C}$  を開集合,  $z_0 \in \Omega$  とする.  $f$  を  $\Omega \setminus \{z_0\}$  上の正則関数とする. もし  $f$  の  $z_0$  での値を定めて  $f$  が  $\Omega$  上で正則になるようにできる場合,  $z_0$  を  $f$  の除去可能な特異点 (removable singularity) と呼ぶ.

命題.  $\Omega \subset \mathbb{C}$  を開集合,  $z_0 \in \Omega$  とする.  $f$  を  $\Omega \setminus \{z_0\}$  上の有界な正則関数とする. このとき  $z_0$  は  $f$  の除去可能な特異点である.

証明.  $\Omega$  を中心  $z_0$  の円板  $D$  に置き換えても一般性を失わない.  $D$  の境界  $\partial D$  に正の向きを入れたものを  $C$  と書く. もし任意の  $z \in D \setminus \{z_0\}$  について

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{w-z} dw \quad (7.2)$$

となることが示せれば, 定理 6.5.4 (積分で定義される正則関数) より右辺は  $D$  上の正則関数を定め,  $z \in D \setminus \{z_0\}$  では  $f$  と値が一致するから結論を得る.

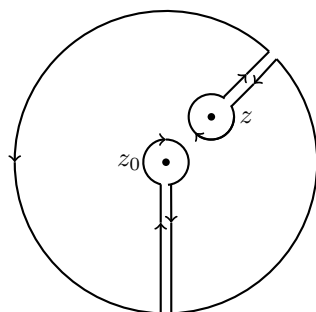
(7.2) を示すため,  $z \in D$  を固定し, 図 1 のような積分路  $\gamma_{\delta, \varepsilon}$  を考える. 但し  $\delta$  は  $z$  と  $z_0$  をさける二つの帯部分の幅であり,  $\varepsilon$  は内側の二円の半径である.

Cauchy の積分定理より  $\int_{\gamma_{\delta, \varepsilon}} [f(w)/(z-w)] dw = 0$ .  $\delta \rightarrow 0$  の極限で

$$\int_{C^+} \frac{f(w)}{w-z} dw + \int_{C_\varepsilon^-(z_0)} \frac{f(w)}{w-z} dw + \int_{C_\varepsilon^-(z)} \frac{f(w)}{w-z} dw = 0. \quad (7.3)$$

但し  $C_\varepsilon^-(w)$  は中心  $w$  半径  $\varepsilon$  の円に正の向きを付けたものである. Cauchy の積分公式 (定理 3.3.1) の証明と同じ議論で

$$\int_{C_\varepsilon^-(z)} \frac{f(w)}{w-z} dw = -2\pi i f(z)$$

図1 積分路  $\gamma_{\delta,\varepsilon}$ 

が分かる. 一方で  $C_\varepsilon^-(z_0)$  上での積分は,  $f$  が有界なので

$$\left| \int_{C_\varepsilon^-(z)} \frac{f(w)}{w-z} dw \right| \leq B\varepsilon$$

と適当な  $B \in \mathbb{R}_{>0}$  を用いて評価できる. よって (7.3) で  $\varepsilon \rightarrow 0$  として (7.2) を得る. □

## 参考文献

[今吉] 今吉洋一, 複素関数概説, サイエンス社 (1997).

[SS] E. M. Stein, R. Shakarchi, *Complex Analysis*, Princeton lectures in Analysis II, Princeton University Press (2003);

日本語訳: エリアス・M. スタイン, ラミ・シャカルチ著, 新井仁之, 杉本充, 高木啓行, 千原浩之訳, プリンストン解析学講義 II 複素解析, 日本評論社 (2009).

以上です.