現代数学基礎 CⅢ　11 月 07 日分小テスト解答[*1]

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp
https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida/2019WC3.html

問題. r を $r \neq 1$ かつ $r \neq \sqrt{3}$ なる正の実数とし, C を原点中心で半径 r の円に正の向きを入れたものとする. 次の積分の値を求めよ.

$$\int_C \frac{z^3}{(z-1)(z^2+2z+3)}\,dz.$$

解答. $z^2+2z+3=0$ の解は $z_1 := -1+\sqrt{2}i$ と $z_2 := -1-\sqrt{2}i$. $z_0 := 1$ とすると, $f(z) = z^3/(z-z_0)(z-z_1)(z-z_2)$ の分母が 0 になるのは $z = z_0, z_1, z_2$ の時. $|z_0| = 1$, $|z_1| = |z_2| = \sqrt{3}$ に注意して r で場合分けする. 積分を I と置く.

(1) $0 < r < 1$ のとき. C の内部で $f(z)$ は正則なので $I = 0$.

(2) $1 < r < \sqrt{3}$ のとき, $g(z) := z^3/(z^2+2z+3)$ は C の内部で正則なので,

$$I = \int_C \frac{g(z)}{z-1}dz = 2\pi i g(1) = \frac{\pi i}{3}.$$

(3) $\sqrt{3} < r$ のとき. 各 $i = 0,1,2$ に対して, z_i のみを内部含む正の向き付けの円を C_i とする. $f(z)$ は C の内部であって各 C_i の外部にある部分では正則なので

$$I = \sum_{i=0}^{2} \int_{C_i} f(z)\,dz.$$

各 i に対し j,k を $\{i,j,k\} = \{0,1,2\}$ となるように取ると, C_i の内部で $g_i(z) := z^3/(z-z_j)(z-z_k)$ で正則なので

$$\int_{C_i} f(z)\,dz = \int_{C_i} \frac{g_i(z)}{z-z_i}\,dz = 2\pi i g_i(z_i) = 2\pi i \frac{z_i^3}{(z_i-z_j)(z_i-z_k)}.$$

$i = 0$ の時は場合 (2) であることに注意して, $i = 1,2$ についても計算すると

$$I = \frac{\pi i}{3} + 2\pi i \frac{-7+4\sqrt{2}i}{12} + 2\pi i \frac{-7-4\sqrt{2}i}{12} = -2\pi i.$$

コメント. 3 点満点で採点しました. 平均点は 0.8 点でした.

小テストの後で解説しましたが、$r > \sqrt{3}$ の場合はホモトピーを使って $\int_C = \int_{C_0} + \int_{C_1} + \int_{C_2}$ とするのがポイントです. この問題も基本的なものなので, 必ず出来るようにして下さい.

以上です.

[*1] 2019/11/07, ver. 0.1.