現代数学基礎 CⅢ　11 月 07 日分演習問題[*1]

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp
https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida/2019WC3.html

6 正則関数の性質

6.1 Taylor 展開

問題 6.1. 以下の関数を括弧内の点を中心にして Taylor 展開せよ.

(1) $\frac{(z+2)}{(z-2)z}$ $[z=1]$　(2) z^{-2} $[z=1]$　(3) $\cos z$ $[z=\pi/4]$　(4) $\tan^{-1} z$ $[z=0]$

問題 6.2. 以下の z の関数を括弧内の点を中心にして Taylor 展開せよ.

(1) $\int_0^z e^{-\zeta^2} d\zeta$ $[z=0]$　(2) $\int_0^z \frac{\sin\zeta}{\zeta} d\zeta$ $[z=0]$　(3) $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ $[z=i/2]$

問題 6.3. 数列 $\{E_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ と $\{B_n \mid n \in \mathbb{Z}_{>0}\}$ を以下のように定義する.

$$\sec z \,=\, \sum_{n=0}^{\infty} \frac{E_n}{(2n)!} z^{2n}, \quad z\cot z \,=\, 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{B_n}{(2n)!} (2iz)^{2n}.$$

E_1, E_2, E_3 および B_1, B_2 を求めよ. なお B_n は **Bernoulli 数**と呼ばれる.

6.2 Liouville の定理

問題 6.4. 講義ノートの定理 6.2.2 (代数学の基本定理) の後半の主張を証明せよ.

6.3 解析接続

問題 6.5. 次の 2 つの関数 $f(z)$ と $g(z)$ が解析接続の関係にあることを示せ.

(1) $f(z) = (1+z^2)^{-1}$ と $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n}$.
(2) $f(z) = z^{-2}$ と $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(z+1)^n$.
(3) $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} z^n/n$ と $g(z) = \log 2 - \sum_{n=1}^{\infty} (1-z)^n/(n \cdot 2^n)$.

問題 6.6. 以下の関数は単位円 $|z|=1$ の外部には解析接続できないことを論じよ.

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} z^{n!}$.　(2) $\sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}$.

6.6 正則関数列

問題 6.7 (Weierstrass の二重級数定理 [杉浦, 第 IX 章 §3 定理 3.5 系]). 講義ノートの定理 6.5.3 (Weierstrass の定理) から次の主張を導け:

開円板 $D = D_c(r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-c| < r\}$ において, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し冪級数

$$f_n(z) \,=\, \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k} (z-c)^k$$

[*1] 2019/10/11, ver. 0.2.

が収束し, また級数

$$F(z) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$$

は D の任意のコンパクト集合上で一様収束するものと仮定する. このとき以下の三つが成立する.

(1) F は D 上の正則関数である.

(2) 任意の $k \in \mathbb{N}$ に対し $A_k := \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,k}$ は収束する.

(3) 任意の $z \in D$ に対して次の等式が成り立つ.

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k (z-c)^k.$$

この主張を Weierstrass の二重級数定理と呼ぶ.

問題 6.8. 正整数 k に対し, k を割り切る正整数の個数を $\tau(k)$ と書く. $|z| < 1$ なる複素数 z に対し次の等式が成立することを, 問題 6.7 の結果を用いて示せ.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{1-z^n} = \sum_{k=1}^{\infty} \tau(k) z^k.$$

レポート問題

次の問題において, $\mathbb{C}$ の部分集合 S が**星形領域** (star domain) であるとは, ある $s \in S$ が存在して, 任意の $t \in S$ と s を結ぶ線分が S に含まれることをいう.

レポート問題 6.1 ([杉浦, 第 IX 章 §3 問題 10])**.** $\mathbb{C}$ の領域 D 上の連続 (複素数値) 関数 f に対し, 以下の六条件が互いに同値であることを示せ.

(i) f は D で正則.

(ii) f は $\mathbb{R}^2$ への写像として D の任意の点で微分可能であり, かつ Cauchy-Riemann 方程式を満たす.

(iii) D に含まれる任意の星形領域 E に対し, E における f の原始関数が存在する.

(iv) D に含まれる任意の星形領域 E 上の任意の区分的に滑らかな曲線 C に対し $\int_C f(z)\,dz = 0$.

(v) D に含まれる任意の閉円板 $\overline{D}_c(r) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z-c| \le r\}$ について, 境界 $|z-c| = r$ に正の向き付けを入れた曲線 C と任意の $z \in D_c(r)$ に対して $f(z) = (2\pi i)^{-1} \int_C [f(w)/(w-z)]\,dw$.

(vi) D に含まれる任意の開円板 $D_c(r)$ において, f は c を中心とする冪級数で表せる.

参考文献

[今吉] 今吉洋一, **複素関数概説**, サイエンス社 (1997).

[杉浦] 杉浦光夫, **解析入門 II**, 東京大学出版会 (1985).

連絡事項

11/1 のオフィスアワーは出張の為お休みさせて頂きます.

以上です.