現代数学基礎 CⅢ　11 月 07 日分演習解答[*1]

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp
`https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida/2019WC3.html`

6　正則関数の性質

6.1　Taylor 展開

問題 6.1.　(1) 部分分数分解して $\frac{z+2}{(z-2)z} = \frac{2}{z-2} - \frac{1}{z} = \frac{2}{(z-1)-1} - \frac{1}{(z-1)+1}$
$= -2\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^n - \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty}((-1)^{n+1}-2)(z-1)^n$.

(2) $z^{-1} = ((z-1)+1)^{-1} = \sum_{n\geq 0}(-1)^n(z-1)^n$ を微分して $z^{-2} = \sum_{n\geq 1} n(-1)^{n+1}(z-1)^{n-1}$.

(3) Taylor 展開 $\cos z = \sum_{n\geq 0} z^{2n}(-1)^n/(2n)!$, $\sin z = \sum_{n\geq 0} z^{2n+1}(-1)^n/(2n+1)!$ から
$\cos z = \cos((z-\pi/4)+\pi/4) = (\cos(z-\pi/4) - \sin(z-\pi/4))/\sqrt{2}$
$= \bigl(\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{(2n)!}(z-\pi/4)^{2n} - \sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(z-\pi/4)^{2n+1}\bigr)/\sqrt{2}$.

(4) $\tan^{-1} z = w \iff iz = (e^{iw}-e^{-iw})/(e^{iw}+e^{-iw}) \iff w = (2i)^{-1}\log(1+iz)/(1-iz)$ より
$\tan^{-1} z = \frac{1}{2i}\bigl(\log(1+iz) - \log(1-iz)\bigr) = \frac{1}{2i}\sum_{n\geq 0}\frac{(iz)^n}{n} - \frac{1}{2i}\sum_{n\geq 0}\frac{(-iz)^n}{n} = \sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{2n+1}z^{2n+1}$.

問題 6.2.　(1) $e^{-\zeta^2} = \sum_{n\geq 0}(-\zeta^2)^n/n!$ は有界な ζ に関して絶対収束するから項別積分できて

$$\int_0^z e^{-\zeta^2}\,d\zeta = \sum_{n\geq 0}\int_0^z \frac{(-\zeta^2)^n}{n!}d\zeta = \sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{n!(2n+1)}z^{2n+1}.$$

(2) $\zeta^{-1}\sin\zeta = \sum_{n\geq 0}(-\zeta^2)^n/(2n+1)!$ は有界な ζ に関して絶対収束するから項別積分できて

$$\int_0^z \frac{\sin\zeta}{\zeta}d\zeta = \sum_{n\geq 0}\int_0^z \frac{(-\zeta^2)^n}{(2n+1)!}d\zeta = \sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!(2n+1)}z^{2n+1}.$$

(3) $|z|<1$ で $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = (1-z)^{-1}$ なので $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \bigl(1-i/2-(z-i/2)\bigr)^{-1} = \sum_{n\geq 0}\frac{(z-i/2)^n}{(1-i/2)^{n+1}}$.

問題 6.3. $\cos z\cdot\sec z = 1$ より $\bigl(1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\frac{z^6}{6!}+\cdots\bigr)\bigl(E_0+\frac{E_1}{2!}+\frac{E_2}{4!}+\frac{E_3}{6!}+\cdots\bigr) = 1$. 両辺の z^{2n} の係数を比較して $E_0 = 1$, $E_1 - E_0 = 0$, $E_2 - \frac{4!}{2!2!}E_1 + E_0 = 0$, $E_3 - \frac{6!}{2!4!}E_2 + \frac{6!}{4!2!}E_1 - E_0 = 0$. E_0 から順に決めていくと $E_0 = 1$, $E_1 = 1$, $E_2 = 5$, $E_3 = 61$. E_n は Euler 数と呼ばれることもある[*2].

次に $z\cot z = iz(e^{iz}+e^{-iz})/(e^{iz}-e^{-iz}) = iz + 2iz/(e^{2iz}-1)$ に注意して, $w := 2iz$ として $\frac{2iz}{e^{2iz}-1} = \frac{w}{e^w-1} = (\sum_{n\geq 1} w^{n-1}/n!)^{-1}$. これを $\sum_{n\geq 0} b_n w^n$ とおくと $\bigl(b_0 + b_1 w + b_2 w^2 + b_3 w^3 + b_4 w^4 + \cdots\bigr)\bigl(1 + w/2! + w^2/3! + w^3/4! + w^4/5! + \cdots\bigr) = 1$. よって $b_0 = 1$, $b_0/2! + b_1 = 0$, $b_0/3! + b_1/2! + b_2 = 0$, $b_0/4! + b_1/3! + b_2/2! + b_3 = 0$, $b_0/5! + b_1/4! + b_2/3! + b_3/2! + b_4 = 0$. これらから $b_1 = -1/2$, $b_2 = 1/12$, $b_3 = 0$, $b_4 = -1/720$ となって $B_1 = 2!\cdot b_2 = 1/6$, $B_2 = -4!\cdot b_4 = 1/30$.

6.2　Liouville の定理

問題 6.4. 多項式 $P(z)$ の次数に関する帰納法で示す. 次数が 1 の場合は $P(z) = a_1 z + a_0 = a_1(z-(-a_0/a_1))$ となるので成立する. 次数が n まで成立したと仮定し, $P(z)$ は次数 $n+1$ の多項式だとする. 前半の議論から,

[*1] 2019/11/07, ver. 0.2.
[*2] The On-line Encyclopedia of Integer Sequences (`https://oeis.org`) の A000364 (`https://oeis.org/A000364`) です.

$P(z)$ の根 w_{n+1} が存在する．多項式の剰余の定理から $P(z) = (z - w_{n+1})Q(z)$, $Q(z)$ は n 次の多項式, と因数分解できる．$Q(z)$ に帰納法の仮定を用いて $n+1$ の時の主張が示せた．

6.3 解析接続

問題 6.5. ある共通の領域内で $f = g$ となることを示せばよい．

(1) f は $|z| < 1$ で $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n} = g(z)$ と展開できるので, 両者は解析接続の関係にある．

(2) g は $|z+1| < 1$ で正則．f の $z = -1$ を中心とした展開は, $-1/z = 1/(1-(1+z)) = \sum_{n\geq 0}(z+1)^n$ を微分して $z^{-2} = \sum_{n\geq 1} n(z+1)^{n-1} = g(z)$ となるので, $|z+1| < 1$ で両者は一致する．

(3) f は $|z| < 1$ で収束し, g は $|z-1| < 2$ で収束する．前者の領域は後者に含まれる．この領域 $|z| < 1$ において $f(z) = \log(1+z) = g(z)$ なので両者は一致する．

問題 6.6. (1) $|z| < 1$ では $\left|z^{(n+1)!}/z^{n!}\right| = |z|^{n+1} \to 0$ $(n \to \infty)$ なので, 級数は収束し, f は正則であることに注意する．任意の有理数 p/q について $z_0 := \exp(2\pi i p/q)$ が特異点であることが示せれば, 有理数の稠密性から $|z| = 1$ 上の任意の点の近傍に特異点が含まれることになり, 外部に解析接続できないことが分かる．

$q \in \mathbb{Z}_{>1}$ として構わない．$z = re^{2\pi i p/q}$ として $r \to 1-0$ で $z \to z_0$ の極限を考える．任意の $n \in \mathbb{Z}_{\geq q}$ に対して $z^{n!} = r^{n!}$ なので $f(z) = \sum_{n=1}^{q-1} z^{n!} + \sum_{n\geq q} r^{n!}$ となり, $r \to 1$ で $\sum_{n\geq q} r^{n!} \to \infty$ から $f(z) \to \infty$ となって, z_0 が特異点であることが分かる．

(2) (1) と同様の議論で, $|z| < 1$ では級数が正則なことが分かる．p を任意の整数, q を任意の正の整数として, $z_0 := \exp(i\pi p/2^q)$ が特異点であることを示そう．$p/2^q$ という形の有理数はやはり稠密なので, (1) と同じ議論で $|z| > 1$ に解析接続できないことが分かる．

$z = r\exp(i\pi p/2^q)$ として $r \to 1-0$ の極限で $z \to z_0$ となる．一方 $z^{2^n} = r^{2^n}\exp(2^{q-n}p\pi i)$ より $g(z) = \sum_{n=1}^{q} z^{2^n} + \sum_{n\geq q+1} r^{2^n}$ となり, $r \to 1$ で $\sum_{n\geq q+1} r^{2^n} \to \infty$ から $f(z) \to \infty$ が従う．

6.6 正則関数列

問題 6.7. 定理 6.5.3 (Weierstrass の定理) より F は $D_c(r)$ 上の正則関数である．よって (1) が成立する．また同定理より F は何度でも項別微分可能で, 項別微分した級数は収束する．すると正則関数の Taylor 展開から $A_k = F^{(k)}(c)/k! = \sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(k)}/k! = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,k}$ となって (2) と (3) が成立する．

問題 6.8. $D := D_0(1) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ とし, $z \in D$ に対し $f_n(z) := z^n/(1-z^n)$ とする．$F := \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ が D の任意のコンパクト部分集合上で一様収束することを示そう．そのためには, 任意の $0 < r < 1$ なる実数 r に対し $D_0(r) \subset D$ で一様収束することを示せば十分．$r^N < 1/2$ なる正整数 N を取る．任意の $z \in D_0(r)$ に対し, $n \geq N$ なら $|f_n(z)| \leq r^n/(1-r^N) < 2r^n$ なので $\left|\sum_{n\geq N} f_n(z)\right| < 2r^N/(1-r)$. よって F は $D_0(r)$ で絶対一様収束することが分かる．

ここで整数 $a_{n,k}$ を, n が k を割り切れば 1, そうでなければ 0 と定める．すると $f_n(z) = \sum_{m=1}^{\infty} z^{nm} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k} z^k$. よって Weierstrass の二重級数定理より $F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k z^k$, $A_k = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n,k} = \tau(k)$.

以上です．