現代数学基礎 CⅢ　11 月 07 日分講義ノート[*1]

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp
`https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida/2019WC3.html`

6　正則関数の性質

前回までと同様, 複素数値関数のことを単に関数と呼ぶ. また開集合または閉集合といったら §1.1 の意味での $\mathbb{C}$ の開集合または閉集合のこととする. また $\mathbb{N} := \{0, 1, 2, \ldots\}$ で非負整数全体の集合を表す. 今回は [SS, Chapter 2, §4, §5] に従って Cauchy の積分公式の応用を述べる. 教科書 [今吉, 5 章] も参照せよ.

6.1　Cauchy の不等式, Taylor 展開

命題 6.1.1 (Cauchy の不等式 [今吉, 補題 5.1]). $D = D_R(z_0)$ を中心 z_0, 半径 R の開円板とし, f は $\overline{D}$ を含むある開集合上の正則関数とする. また $\|f\|_{\partial D} := \sup_{z \in \partial D} |f(z)|$ とする. このとき, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\left|f^{(n)}(z_0)\right| \le n! \, \|f\|_{\partial D} / R^n.$$

特に $n = 0$ の場合は $\left|f(z_0)\right| \le \|f\|_{\partial D} / R$.

証明. $C := \partial D^+$ を D の境界に正の向きを入れたものとする. Cauchy の積分公式を $f^{(n)}(z_0)$ に適用して

$$\begin{aligned}\left|f^{(n)}(z_0)\right| &= \left|\frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}dw\right| = \frac{n!}{2\pi}\left|\int_C \frac{f(z_0+Re^{i\theta})}{(re^{i\theta})^{n+1}}Rie^{i\theta}\,d\theta\right| \\ &\le \frac{n!}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\|f\|_{\partial D}}{R^n}d\theta = \frac{n!}{R^n}\|f\|_{\partial D}\end{aligned}$$

□

定理 6.1.2 (正則関数の Taylor 展開 [今吉, 定理 5.3]). D を中心 z_0 の開円板とし, f を $\overline{D}$ を含む開集合上の正則関数とする, このとき f は任意の $z \in D$ において次の級数展開を持つ.

$$f(z) = \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n, \quad a_n := f^{(n)}(z_0)/n!.$$

証明. $z \in D$ を固定する. $C := \partial D^+$ として, Cauchy の積分公式より $f(z) = (2\pi i)^{-1}\int_C f(w)(w-z)^{-1}dw$. ここで $|(z-z_0)/(w-z_0)| < 1$ に注意して

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w-z_0-(z-z_0)} = \frac{1}{w-z_0}\frac{1}{1-(z-z_0)/(w-z_0)} = \frac{1}{w-z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^n.$$

と展開する. この級数が w に関して絶対収束することから, 級数和と積分が順序交換できて,

$$f(w) = \sum_{n=0}^{\infty}(z-z_0)^n\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n.$$

□

[*1] 2019/11/07, ver. 0.2.

6.2 Liouville の定理

Cauchy の積分公式の応用として整関数に関する **Liouville**[*2] **の定理**が得られる.

定義. $\mathbb{C}$ 上で正則な関数を**整関数** (entire function) と呼ぶ. また関数 $f : \Omega \to \mathbb{C}$ が**有界**であるとは, ある $B \in \mathbb{R}_{>0}$ があって任意の $z \in \Omega$ に対して $|f(z)| < B$ となるもののことをいう.

定理 6.2.1 (Liouville の定理 [今吉, 定理 5.4])**.** 有界な整関数は定数関数である.

証明. 任意の $z \in \mathbb{C}$ に対して $f'(z) = 0$ を証明すれば, 系 2.2.4 より $f(z)$ は定数だと分かる. $B \in \mathbb{R}$ を任意の $z \in \mathbb{C}$ に対して $|f(z)| \le B$ となるものとすると, Cauchy の不等式 (命題 6.6.1) より任意の $z \in \mathbb{C}$ と $R \in \mathbb{R}_{>0}$ に対して $|f'(z)| \le \frac{B}{R}$. そこで $R \to \infty$ とすれば $f'(z) = 0$ が分かる. □

Liouville の定理の簡単な応用を紹介する.

定理 6.2.2 (代数学の基本定理 [今吉, 定理 5.5])**.** 定数でない複素数係数多項式 $P(z) = a_n z^n + \cdots + a_0$ は複素数の根を持つ. 特に $P(z) = a_n(z - w_1)\cdots(z - w_n)$, $z_i \in \mathbb{C}$ と因数分解できる.

証明. もし根がなければ関数 $1/P(z)$ は $\mathbb{C}$ 上有界な正則関数である. 実際, $a_n \neq 0$ と仮定すると, $z \neq 0$ なら $P(z)/z^n = a_n + (a_{n-1}/z + \cdots + z_0/z^n)$ だが, ここで $|z| \to \infty$ とすると右辺の括弧内は 0 に収束するので, $c := |a_n|/2$ とすればある $R \in \mathbb{R}_{>0}$ が存在して $|z| > R$ なら $P(z)/|z|^n \ge c$ となる. つまり $|z| > R$ なら $1/P(z) \le 1/(c|z|^n)$ となり, この開集合上で $1/P$ が有界であることが分かる. 一方 $|z| \le R$ では $|P|$ は 0 にならない連続関数なので, $1/P$ は有界閉集合 $|z| \le R$ 上有界になる. 以上より $1/P(z)$ は $\mathbb{C}$ 上有界な正則関数.

すると Liouville の定理 (定理 6.2.1) より $1/P$ は定数. これは P が定数でないことと矛盾する.

後半の証明は演習問題とする. □

6.3 一致の定理と解析接続

Cauchy の積分公式から解析接続の概念が導入できる. その説明のためにまず一致の定理の紹介から始める.

定義. $\Omega \subset \mathbb{C}$ を開集合とする. 点列 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \Omega$ が**集積点** (accumulation point) を持つ, あるいは極限点 (limit point) を持つとは, $\lim_{n\to\infty} z_n$ が存在して Ω に属することをいう.

定理 6.3.1 (一致の定理 [今吉, 系 5.4])**.** f を領域 Ω 上の正則関数とする. Ω に集積点を持つ, 相異なる点からなる点列が存在して, その上で f が 0 になるなら, f は恒等的に 0 である.

証明. $z_0 \in \Omega$ が点列 $\{w_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \Omega$ の集積点であり, また任意の k に対し $f(w_k) = 0$ だと仮定する.

まず z_0 を含むある開円板 D が存在して, f が D 上 0 であることを背理法で示す. 定理 6.1.2 より

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

と展開すると, 背理法の仮定より $a_m \neq 0$ なる m が存在する. そのうち最小のものを m と書き直すと, $w \to 0$

[*2] フランスの数学者で, カタカナだとリューヴィルないしリユヴィル.

で $g(w) \to 0$ となる関数 g を用いて

$$f(z) = a_m(z-z_0)^m(1+g(z-z_0))$$

と書ける．ここで $z = w_k$ とすると $0 = f(w_k) = a_m(w_k - z_0)^m(1+g(w_k-z_0))$．一方，$\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$ の仮定から $w_k \neq z_0$ だから $a_m(w_k-z_0)^m \neq 0$．また k を十分大きくとれば $1+g(w_k-z_0) \neq 0$．これで矛盾が得られた．

次に U を $Z := \{z \in \Omega \mid f(z) = 0\}$ の内部とする．定義より U は開集合で，前半の議論より $U \neq \emptyset$．一方 U は閉集合でもある．実際，点列 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset U$ が極限 $z = \lim_{n\to\infty} z_n \in \mathbb{C}$ を持てば，f の連続性から $f(z) = \lim_{n\to\infty} f(z_n) = 0$ より $z \in Z$ となる．すると前半の議論から z を含む開円板 D があって f は D 上 0 になるが，これは $z \in U$ を意味する．よって U の閉包は U に一致し，閉包は閉集合だから，U は閉集合である．

すると $V := \Omega \setminus U$ も開かつ閉であり，$\Omega = U \sqcup V$ と $U \neq \emptyset$ および Ω が連結であることから $V = \emptyset$，つまり $\Omega = U$，すなわち f は Ω 上で 0 であることが分かった． □

言い換えると

系 6.3.2 ([今吉, 系 5.2])**.** 領域 Ω 上の正則関数 f, g が Ω の空でない開部分集合上で一致するなら，Ω 上で $f = g$ となる．

定義. $U \subset V$ を領域とする．f を U 上の正則関数，g を V 上の正則関数とする．もし $g|_U = f$ なら，g を f の V での**解析接続** (analytic continuation) と呼ぶ．

上の系 6.3.2 より，解析接続は (存在すると仮定すると) 一意に定まる．

6.4 Morera の定理

次の Morera の定理は，Cauchy の積分定理の逆を主張するものである．

定理 6.4.1 (**Morera の定理** [今吉, 定理 5.12])**.** $D \subset \mathbb{C}$ を開円板とし，f を D 上の連続関数とする．任意の三角形 $T \subset D$ に対し $\int_T f(z)\,dz = 0$ ならば f は正則である．

証明. 定理 4.2.1 (円板上の正則関数は原始関数を持つ) の証明が定理 4.1.2 (Goursat の定理) と与えられた関数の連続性しか用いなかったことに注意して，同様の議論から f は D 上の原始関数 F を持つ．特に F は正則関数だから，系 4.3.2 (正則関数は無限回微分可能) より F は二回複素微分可能．これは f が複素微分可能，つまり正則であることを意味する． □

6.5 正則関数列

(複素) 数列の収束と同様に，関数列の収束という概念が考えられる．数列の場合と違うのは，収束の概念に様々なものがある点である．ここでは正則関数の列に関して有用な収束概念を紹介する．まず $\mathbb{C}$ の位相に関して新しい概念を導入する．

定義. $S \subset \mathbb{C}$ を部分集合とする．

(1) S の**開被覆** (open covering) とは，開集合 $U_i \subset \mathbb{C}$ の族 $\{U_i\}_{i\in I}$ であって $S \subset \cup_{i\in I} U_i$ となるもののことである．

(2) S が**コンパクト** (compact) であるとは, S の任意の開被覆 $\{U_i\}_{i\in I}$ が有限部分被覆を持つ, つまり有限部分集合 $J \subset I$ が存在して $S \subset \{U_j\}_{j\in I}$ となることをいう.

コンパクト集合は $\mathbb{C}$ 以外の位相空間に対しても定義できる概念であるが, 次の主張は $\mathbb{C}$ の位相 (Euclid 位相) に関して成り立つ特殊なものである.

定理 6.5.1. $\mathbb{C}$ の部分集合について, コンパクトであることと有界閉集合であることは同値.

特に $\mathbb{C}$ の円板 $D := \{z \in \mathbb{C} \mid |z-c| < r\}$ の閉包 $\overline{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-c| \leq r\}$ はコンパクトである.

ここで関数の一様収束性を思い出しておいてほしい. 次の定理は正則関数列の収束先が正則関数である, というものである. その仮定に一様収束性を用いる.

定理 6.5.2. $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を開集合 Ω 上の正則関数の列であって, Ω の任意の部分コンパクト集合上で関数 f に一様収束するものとする. このとき f は Ω 上の正則関数である.

証明. D を $\overline{D} \subset \Omega$ となる任意の円板とし, $T \subset D$ を任意の三角形とする. 各 f_n が正則なので, Goursat の定理 4.1.2 より $\int_T f_n(z)\,dz = 0$. $\overline{D}$ はコンパクトなので, 仮定より $\overline{D}$ 上で一様に $f_n \to f$ と収束する. 従って f は連続で, また $\int_T f_n(z)\,dz \to \int_T f(z)\,dz$ と収束する. 特に $\int_T f(z)\,dz = 0$. T は任意に取っていたから, Morera の定理 6.4.1 より f は D 上正則. D も任意に取っていたから, f は Ω 上で正則である. □

任意のコンパクト集合上での一様収束性を広義一様収束性と呼ぶことにすると, 次の Weierstrass[*3] の定理は正則関数列の広義一様収束先が項別微分可能であることを主張している.

定理 6.5.3 (Weierstrass の定理 [今吉, 定理 5.13]**).** 定理 6.5.2 と同じ仮定のもと, 関数列 $\{f_n'\}_{n\in\mathbb{N}}$ は Ω の任意の部分コンパクト集合上で f' に一様収束する.

証明. Ω 上一様収束すると仮定しても一般性を失わない. $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ に対して $\Omega_\delta := \{z \in \Omega \mid \overline{D_\delta(z)} \subset \Omega\}$ と定める. 主張を証明するには, 任意の δ に対して Ω_δ 上で $\{f_n'\}$ が f' に一様収束することを示せば十分. そのためには, Ω 上の任意の正則関数 F に対して

$$\sup_{z\in\Omega_\delta} |F'(z)| \;\leq\; \frac{1}{\delta} \sup_{w\in\Omega} |F(w)|$$

を示せば十分. 実際, この不等式を $F = f_n - f$ に適用すればよい. Cauchy の積分公式から, C を $\partial D_\delta(z)$ に正の向きを入れたものとして

$$F'(z) \;=\; \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{F(w)}{(w-z)^2}\,dw.$$

従って

$$|F'(z)| \;\leq\; \frac{1}{2\pi}\int_C \frac{|F(w)|}{|(w-z)^2|}\,|dw| \;\leq\; \frac{1}{2\pi}\sup_{w\in\Omega}|F(w)| \cdot \frac{2\pi\delta}{\delta}^2 \;=\; \frac{1}{\delta}\sup_{w\in\Omega}|F(w)|.$$

□

定理 6.5.2 の応用として, 積分で定義される正則関数を紹介する.

[*3] ドイツの数学者で, カタカナだとワイエルシュトラス.

定理 6.5.4. $\Omega \subset \mathbb{C}$ を開集合とし, $F(z,s)$ を $(z,s) \in \Omega \times [0,1]$ 上で定義された関数で次の二条件を満たすものとする.

- 任意の s について $F(z,s)$ は z に関する正則関数.
- F は $\Omega \times [0,1]$ 上連続.

このとき次式で定義される関数 f は Ω 上の正則関数である.

$$f(z) := \int_0^1 F(z,s)\,ds.$$

証明. 各 $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して

$$f_n(z) := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} F(z,k/n)$$

と定めると, 最初の条件より f_n は Ω 上で正則. 関数列 $\{f_n\}_{n\geq 1}$ が $\overline{D} \subset \Omega$ となる任意の円板 D 上で一様に f に収束することが示せれば, 定理 6.5.2 より f は正則である. コンパクト集合上の連続関数は一様連続だから, 任意の $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ に対して $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ が存在して, $|s_1 - s_2| < \delta$ ならば $\sup_{z\in D} |F(z,s_1) - F(z,s_2)| < \varepsilon$ となる. 従って $n > 1/\delta$ となるよう n を取れば

$$\begin{aligned} |f_n(z) - f(z)| &= \left| \sum_{k=1}^{n} \int_{(k-1)/n}^{k/n} (F(z,k/n) - F(z,s))\,ds \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^{n} \int_{(k-1)/n}^{k/n} |F(z,k/n) - F(z,s)|\,ds \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon}{n} = \varepsilon. \end{aligned}$$

よって $\{f_n\}_{n\geq 1}$ は一様に f に収束する. □

参考文献

[今吉] 今吉洋一, **複素関数概説**, サイエンス社 (1997).

[SS] E. M. Stein, R. Shakarchi, *Complex Analysis*, Princeton lectures in Analysis Ⅱ, Princeton University Press (2003);
日本語訳: エリアス・M. スタイン, ラミ・シャカルチ著, 新井仁之, 杉本充, 高木啓行, 千原浩之訳, **プリンストン解析学講義 Ⅱ 複素解析**, 日本評論社 (2009).

以上です.