現代数学基礎 CⅢ　10 月 31 日分小テスト解答*1

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp
https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida/2019WC3.html

問題. n を整数とし, C を単位円 $|z|=1$ に正の向きを入れたものとする. 次の複素積分の値を求めよ.

$$\int_C \frac{e^z}{z^n}\,dz.$$

解答. $n \le 0$ の場合. 被積分関数 e^z/z^n が C とその内部 $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ を含む開集合, 例えば $D := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 2\}$ 上で正則なので, Cauchy の積分定理より $\int_C e^z z^{-n}\,dz = 0$.

$n \ge 1$ の場合. D 上の正則関数 $f(z) := e^z$ に対して高階微分に関する Cauchy の積分公式 (講義ノートの系 4.3.2) を用いると

$$f^{(n-1)}(0) = \frac{(n-1)!}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z^n}\,dz.$$

左辺は $f^{(n-1)}(0) = e^z|_{z=0} = 1$ だから, 答えは $2\pi i/(n-1)!$.

コメント. 3 点満点で採点しました. 平均点は 1.3 点でした.

教科書の [今吉, 例題 5.2] です. 基本的な問題なので必ずできるようにしておいて下さい. Cauchy の積分公式を用いるだけでできる問題ですが, (この問題に限らず) 定理を利用するときはその仮定が満たされていることを必ず答案に書いて下さい. この問題の場合だと, **閉曲線 C だけではなく, その内部も含むような領域** (上の解答だと D) を明示して議論して下さい.

参考文献

[今吉] 今吉洋一, **複素関数概説**, サイエンス社 (1997).

以上です.

*1 2019/10/31, ver. 0.1.