現代数学基礎 CⅢ　10 月 31 日分演習[*1]

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp
https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida/2019WC3.html

5　Cauchy の定理 2

5.1　ホモトピーと単連結領域

問題 5.1. $\mathbb{C}$ の部分集合 S が凸 (convex) であるとは, S の任意の二点を結ぶ線分が S に含まれることをいう. 凸な開集合は単連結領域であることを示せ.

問題 5.2. $\mathbb{C} \setminus \{(-\infty, 0]\}$ は単連結領域であることを示せ.

問題 5.3. $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ は領域ではあるが単連結領域ではないことを示せ.

問題 5.4 ([今吉, 演習問題 4.7])**.** $\mathbb{C}$ 内の単純閉曲線であって正の向き付けを持ち $\pm i$ を内部にもつ積分路 C に沿った次の複素積分を計算せよ.

$$\int_C \frac{1}{z^2+1}\, dz.$$

問題 5.5. 円 $|z| = 1$ と直線 $\mathrm{Re}(z) = -1/2$ との一部からなり, 原点を含む閉曲線に正の向き付けを入れたものを積分路として, 以下の関数の複素積分を求めよ.

(1) $\dfrac{1}{z}$.　　(2) $\dfrac{\sin z}{z}$.　　(3) $\dfrac{1}{z^2 - 4/9}$.

問題 5.6. 次の実積分を複素積分を用いて計算せよ[*2]. 但し $c \in \mathbb{C}$, $|c| < 1$ とする.

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 - 2c\cos\theta + c^2}.$$

問題 5.7 ([今吉, 演習問題 4.10])**.** $\mathbb{C}$ 内の単純閉曲線で囲まれた領域 D について

(1) D の面積が次の複素積分で与えられることを示せ. 但し ∂D^+ は D の境界に正の向き付けを入れたものとする.

$$\frac{1}{2i}\int_{\partial D^+} \overline{z}\, dz.$$

(2) f を $\overline{D}$ 上の単射な正則関数とする. D の f による像 $f(D)$ の面積が次の重積分で与えられることを示せ.

$$\iint_D |f'(x+iy)|^2\, dxdy.$$

[*1] 2019/11/21, ver. 0.4.
[*2] ver. 0.2 で訂正しました.

問題 5.8 ([SS, Chapter 2 Exercise 11])**.** $R_0 \in \mathbb{R}_{>0}$ とし, f を原点中心の開円板 $D_{R_0}(0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R_0\}$ 上の正則関数とする. また $R \in \mathbb{R}$ と $z \in \mathbb{C}$ を $0 < R < R_0$ かつ $|z| < R$ なるものとする.

(1) $w := R^2/\overline{z}$ とする. 次の等式を示せ.

$$\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - w}\, d\zeta \;=\; 0.$$

但し積分路 C は原点中心で半径 R の円とする.

(2) 次の等式を示せ[*3].

$$f(z) \;=\; \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(Re^{i\varphi})\,\mathrm{Re}\Big(\frac{Re^{i\varphi}+z}{Re^{i\varphi}-z}\Big)\, d\varphi.$$

レポート問題

レポート問題 5.1 ([SS, Chap. 2, Exercise 12])**.** u を単位円板 $\overline{D_1(0)} = \{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$ を含む開集合[*4]上の実数値関数であって 2 回連続微分可能かつ

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) \;=\; 0$$

が任意の $z = x + iy \in D_1(0)$ で成立するものと仮定する.

(1) $D_1(0)$ 上の正則関数 f であって $\mathrm{Re}(f) = u$ となるものが存在することを示せ. またこのような f の虚部は定数を足す分を除いて一意であることを示せ.

(2) 問題 5.8 と (1) を用いて次の等式を示せ[*5].

$$u(re^{i\theta}) \;=\; \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta - \varphi)u(e^{i\varphi})\, d\varphi.$$

但し

$$P_r(\gamma) \;:=\; \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos\gamma + r^2}.$$

こうして得られた (2) の等式を**調和関数の Poisson 積分表示**と呼ぶ.

参考文献

[今吉] 今吉洋一, **複素関数概説**, サイエンス社 (1997).

[SS] E. M. Stein, R. Shakarchi, *Complex Analysis*, Princeton lectures in Analysis II, Princeton University Press (2003);
日本語訳: エリアス・M. スタイン, ラミ・シャカルチ著, 新井仁之, 杉本充, 高木啓行, 千原浩之訳, **プリンストン解析学講義 II 複素解析**, 日本評論社 (2009).

以上です.

*3 ver. 0.3 で訂正しました.
*4 ver. 0.4 で訂正しました.
*5 ver. 0.3 で訂正しました.