現代数学基礎 CⅢ　10 月 31 日分演習解答[*1]

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp
https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida/2019WC3.html

5　Cauchy の積分定理 2

5.1　ホモトピーと単連結領域

問題 5.1. 弧状連結なので連結である．開集合であることは仮定に含まれているので, これで領域であることが示せた．次に単連結であることを示す．S の二点 p, q を結ぶ曲線 γ とそれらを結ぶ線分 I がホモトピー同値であることを示せば十分．前者のパラメータ表示を $f(t) : [0,1] \to S$ とし, 後者のパラメータ表示を $g(t) : [0,1] \to S$ とすると, $H(s,t) := (1-s)f(t) + sg(t)$ は凸であるという仮定から S への写像で, 連続であり, ホモトピーを定める．

問題 5.2. 弧状連結なので連結．開集合であることは, 任意の $z \in \mathbb{C} \setminus \{(-\infty, 0]\}$ に対して $D_{|\mathrm{Im}(z)|/2}(z) \subset \mathbb{C} \setminus \{(-\infty, 0]$ となることから従う．単連結であることを示すには任意の閉曲線 C が一点とホモトープであることを言えばよい．C は $\{z \in \mathbb{C} \mid z > 1\}$ の領域内の部分とホモトープだから, あとは $\{z \in \mathbb{C} \mid z > 1\}$ が単連結であることを言えばよいが, それは凸開集合なので問題 5.1 より従う．

問題 5.3. 弧状連結なので連結である．開集合であることは, 任意の $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ に対して $D_{|z|/2}(z) \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ となることから従う．単連結領域ではないことを示すのに関数 $f(z) = 1/z$ を考える．f は $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ 上で正則だが, 単位円に正の向きを入れたものを C として $\int_C f(z)dz = 2\pi i \neq 0$. もし $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ が単連結ならば定理 5.1.5 より f は原始関数を持つので $\int_C f(z)dz = 0$ となり矛盾する．

問題 5.4. $(z^2+1)^{-1} = ((z+i)^{-1} - (z-i)^{-1})/(2i)$ と分解する．$C_\pm$ を $\pm i$ を中心とし半径を 1/2 とする円に正の向き付けを入れたものとして

$$\begin{aligned}\int_C \frac{dz}{z^2+1} &= \int_C \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{z+i} - \frac{1}{z-i}\right)dz = \frac{1}{2i}\int_C \frac{dz}{z+i} - \frac{1}{2i}\int_C \frac{dz}{z-i} \\ &= \frac{1}{2i}\int_{C_-} \frac{dz}{z+i} - \frac{1}{2i}\int_{C_+} \frac{dz}{z-i} = \frac{2\pi i(1-1)}{2i} = 0.\end{aligned}$$

問題 5.5. 積分を I で表すことにする．

(1) $z = 0$ を中心とした半径 $r < 1/2$ の円での積分と同じになるので, $I = 2\pi i \times 1 = 2\pi i$.

(2) 被積分関数は積分路の上とその内部で正則なので $I = 0$.

(3) $(z^2 - 4/9)^{-1} = (z - 2/3)^{-1}(z + 2/3)^{-1}$ で積分路の内部では $z = 2/3$ を除いて正則．その周りでは, $w := z - 2/3$ として

$$\frac{1}{z^2 - 4/9} = \frac{1}{w}\frac{1}{w + 4/3} = \frac{3}{4}\frac{1}{w}(1 + O(w))$$

と展開できるので, $I = 2\pi i \times 3/4 = 3\pi i/2$.

[*1] 2019/05/04, ver. 0.1.

問題 5.6. 積分を I と表す. $z = 2e^{i\theta}$ とすると $d\theta = dz/iz$, $\cos\theta = (z + z^{-1})/2$ なので

$$I = \int_{|z|=1} \frac{dz}{iz} \frac{1}{1 - c(z + z^{-1}) + c^2} = \int_{|z|=1} \frac{idz}{c(z-c)(z-c^{-1})}.$$

単位円上とその内部では被積分関数は $z = c$ を除いて正則で, $z = c$ の周りでは $w := z - c$ として

$$\frac{1}{c(z-c)(z-c^{-1})} = \frac{1}{cw(w + c - c^{-1})} = \frac{1}{c(c-c^{-1})w}(1 + O(w))$$

と展開できるので, $I = 2\pi i \times i/(c^2 - 1) = 2\pi/(1 - c^2)$.

問題 5.7. (1) Green の公式から直ちに従う.

(2) $f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ と実部と虚部に分けると, $(u(x, y), v(x, y))$ の Jacobi 行列式は, Cauchy-Riemann 方程式と $f'(z) = u_x(x, y) + iv_x(x, y)$ から

$$\begin{vmatrix} u_x(x,y) & v_x(x,y) \\ u_y(x,y) & v_y(x,y) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_x(x,y) & v_x(x,y) \\ -v_y(x,y) & u_x(x,y) \end{vmatrix} = u_x(x,y)^2 + v_x(x,y)^2 = |f'(x+iy)|^2.$$

よって $f(D)$ の面積は

$$\iint_{f(D)} dudv = \iint_D |f'(x+iy)|^2\, dxdy.$$

問題 5.8. (1) $|w| > R$ より, 被積分関数は C 上とその内部で正則である. 従って積分は 0.

(2) $\zeta = Re^{i\varphi}$ と変数変換する.

$$\mathrm{Re}\left(\frac{Re^{i\varphi} + z}{Re^{i\varphi} - z}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{\zeta + z}{\zeta - z}\right) = \mathrm{Re}\left(-1 + \frac{2\zeta}{\zeta - z}\right) = -1 + \frac{\zeta}{\zeta - z} + \frac{\overline{\zeta}}{\overline{\zeta} - \overline{z}}$$

に注意して, 示すべき等式の右辺は

$$\begin{aligned}\int_C f(\zeta)\left(-1 + \frac{\zeta}{\zeta - z} + \frac{\overline{\zeta}}{\overline{\zeta} - \overline{z}}\right)\frac{d\zeta}{i\zeta} &= \frac{1}{i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta + \frac{1}{i}\int_C f(\zeta)\left(-1 + \frac{\overline{\zeta}}{\overline{\zeta} - \overline{z}}\right)\frac{d\zeta}{\zeta} \\ &= 2\pi f(z) + \frac{1}{i}\int_C f(\zeta)\left(-1 + \frac{\overline{\zeta}}{\overline{\zeta} - \overline{z}}\right)\frac{d\zeta}{\zeta}. \qquad (5.1)\end{aligned}$$

ここで C 上で $\overline{\zeta} = R^2/\zeta$ となることに注意して

$$\frac{1}{i}\int_C f(\zeta)\frac{\overline{\zeta}}{\overline{\zeta} - \overline{z}}\frac{d\zeta}{\zeta} = \frac{1}{i}\int_C \frac{f(\zeta)}{1 - \overline{z}/\overline{\zeta}}\frac{d\zeta}{\zeta} = \frac{1}{i}\int_C \frac{f(\zeta)}{1 - \overline{z}\zeta/R^2}\frac{d\zeta}{\zeta} = \frac{1}{i}\int_C \frac{f(\zeta)}{1 - \zeta/w}\frac{d\zeta}{\zeta}.$$

従って (5.1) の最右辺は

$$2\pi f(z) + \frac{1}{i}\int_C f(\zeta)\left(-1 + \frac{1}{1 - \zeta/w}\right)\frac{d\zeta}{\zeta} = 2\pi f(z) + \frac{1}{i}\int_C f(\zeta)\frac{1}{\zeta - w}d\zeta.$$

第二項は (1) より 0 なので, 結論を得る.

以上です.