

現代数学基礎 CIII 10月31日分講義ノート<sup>\*1</sup>

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)

yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp

<https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida/2019WC3.html>

## 5 Cauchy の積分定理 2

今回の内容は [SS, Chapter 3 §5, §6] に基づく. 教科書 [今吉, §4.1.2; 定理 4.7; §5.1] も参照のこと.

## 5.1 ホモトピーと単連結領域

前回の §4.2 で Cauchy の積分定理を円板の場合に証明した. 今回はそれを拡張する (系 5.1.6). そのために  $\mathbb{C}$  内の曲線の間ホモトピーについて考える.

**定義 5.1.1.**  $\Omega \subset \mathbb{C}$  を開集合とし,  $\gamma_0$  と  $\gamma_1$  を始点と終点が等しい  $\Omega$  内の曲線とする.  $\gamma_0$  と  $\gamma_1$  が  $\Omega$  内でホモトピック (homotopic) であるとは, 以下の三条件を満たす連続写像  $h(s, t) : [0, 1] \times [a, b] \rightarrow \Omega$  が存在することをいう. またそのような  $h$  を  $\gamma_0$  と  $\gamma_1$  のホモトピー写像と呼ぶ.

- 任意の  $s \in [0, 1]$  を固定すると,  $h_s : [a, b] \rightarrow \Omega$ ,  $h_s(t) := h(s, t)$  は  $\Omega$  内の区分的に滑らかな曲線を定める.
- $h(0, t)$  は  $\gamma_0$  の,  $h(1, t)$  は  $\gamma_1$  のパラメータ付けになっている.
- 任意の  $s \in [0, 1]$  について  $h(s, a) = h(0, a) = h(1, a)$  かつ  $h(s, b) = h(0, b) = h(1, b)$ .

**定理 5.1.2.** 開集合  $\Omega \subset \mathbb{C}$  上の正則関数  $f$  と  $\Omega$  内のホモトピックな区分的に滑らかな曲線  $\gamma_0, \gamma_1$  に対し

$$\int_{\gamma_0} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz.$$

**証明.**  $\gamma_0$  と  $\gamma_1$  のホモトピー写像を  $h : [0, 1] \times [a, b] \rightarrow \Omega$  とし,  $h$  の像を  $K$  と書く. ここで Euclid 空間の部分集合について “コンパクト  $\iff$  有界閉” であること (定理 6.5.1 を参照) と, コンパクト集合の連続写像による像がコンパクトであることを思い出すと,  $K$  はコンパクト. 更に距離空間の部分集合について “コンパクト  $\iff$  点列コンパクト” であることから,  $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$  であって任意の  $z \in K$  に対して  $D_{3\varepsilon}(z) \subset \Omega$  となるものが存在する. 以下このような  $\varepsilon$  を固定する.

$h$  の一様連続性から,  $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$  であって  $|s_1 - s_2| < \delta$  なら  $\sup_{t \in [a, b]} |h(s_1, t) - h(s_2, t)| < \varepsilon$  となるものが存在する. このような  $\delta$  も固定しよう.

以下  $|s_1 - s_2| < \delta$  なる  $s_1, s_2 \in [0, 1]$  を固定し,  $\gamma_s$  を  $h_s : [a, b] \rightarrow \Omega$ ,  $h_s(t) := h(s, t)$  の定める曲線として,

$$\int_{\gamma_{s_1}} f(z) dz = \int_{\gamma_{s_2}} f(z) dz$$

を示す. これが示せれば,  $s_1, s_2$  を取り直して繰り返しこの等式を用いることで結論が得られる.

$K$  のコンパクト性から, 半径  $2\varepsilon$  の有限個の開円板  $D_0, \dots, D_n$  であって  $\gamma_{s_1}, \gamma_{s_2} \subset D_0 \cup \dots \cup D_n$  となるものが存在する. 更に, 必要なら  $D_i$  達を取り直して, 曲線  $\gamma_{s_1}$  上の点  $z_0, \dots, z_{n+1}$  および曲線  $\gamma_{s_2}$  上の点  $w_0, \dots, w_{n+1}$  であって,

<sup>\*1</sup> 2019/10/31, ver. 0.2

- 各  $i = 0, \dots, n$  に対して  $z_i, z_{i+1}, w_i, w_{i+1} \in D_i$

となるものが存在する. 特に  $z_0 = w_0 = h(s, 0)$  (曲線の始点),  $z_{n+1} = w_{n+1} = h(s, 1)$  (曲線の終点) とすることができる.

各  $D_i$  上での  $f$  の原始関数を  $F_i$  と書く (定理 4.2.1).  $D_i \cap D_{i+1}$  で  $F_i$  と  $F_{i+1}$  の微分は等しいから,  $F_i - F_{i+1}$  は定数関数. 特に  $F_i(z_{i+1}) - F_{i+1}(z_{i+1}) = F_i(w_{i+1}) - F_{i+1}(w_{i+1})$  であり, 従って

$$F_{i+1}(z_{i+1}) - F_{i+1}(w_{i+1}) = F_i(z_{i+1}) - F_i(w_{i+1}).$$

これを繰り返し用いると

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_{s_1}} f(z) dz &= \int_{\gamma_{s_2}} f(z) dz = \sum_{i=0}^n (F_i(z_{i+1}) - F_i(z_i)) - \sum_{i=0}^n (F_i(w_{i+1}) - F_i(w_i)) \\ &= \sum_{i=0}^n ((F_i(z_{i+1}) - F_i(w_{i+1})) - (F_i(z_i) - F_i(w_i))) \\ &= (F_n(z_{n+1}) - F_n(w_{n+1})) - (F_0(z_0) - F_0(w_0)) = 0. \end{aligned}$$

□

連結開集合を領域と呼んだ (§1.1) ことを思い出そう.

**定義 5.1.3.** 領域  $\Omega \subset \mathbb{C}$  が単連結 (simply connected) であるとは, 始点と終点を共有する  $\Omega$  内の二つの曲線が必ずホモトピックであることをいう.

**補題 5.1.4.** 開円版は単連結領域である.

**証明.**  $z_0(t)$  と  $z_1(t)$  を開円板  $D$  内の二曲線のパラメータ付けとして,  $h(s, t) := (1-s)z_0(t) + sz_1(t)$  とすればこれが求めるホモトピー写像になる. □

**定理 5.1.5.** 単連結領域上の正則関数は原始関数を持つ.

**証明.**  $\Omega \subset \mathbb{C}$  を単連結領域とし,  $z_0 \in \Omega$  を固定する.  $z \in \Omega$  と  $z_0$  を結ぶ  $\Omega$  内の曲線を  $\gamma$  として

$$F(z) := \int_{\gamma} f(w) dw$$

と定めると, 定理 5.1.2 よりこれは  $\gamma$  の選び方によらないので well-defined. すると,  $h \in \mathbb{C}$  を  $z+h \in \Omega$  なるものとして,

$$F(z+h) - F(z) = \int_{\eta} f(w) dw$$

と書ける. 但し  $\eta$  は  $z$  を始点とし  $z+h$  を終点とする  $\Omega$  内の曲線. すると定理 4.2.1 (開円板上の正則関数は原始関数を持つ) と同じ議論により

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(z+h) - F(z)}{h} = f(z).$$

□

この定理から次の形の Cauchy の積分定理が従う.

**系 5.1.6.**  $f$  が単連結領域  $\Omega \subset \mathbb{C}$  上の正則関数で,  $\gamma$  が  $\Omega$  内の区分的に滑らかな閉曲線なら

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

## 5.2 複素対数

複素関数としての対数関数には §1.5 でも触れたが, ここでもう一度詳しく扱う.

§1.5 では  $\log z$  を  $e^z$  の逆関数として定義した. そして  $\log z$  が無限多価関数であることを説明した. つまり,  $z = re^{i\theta}$  と極座標表示すると,

$$\log z = \log r + \theta + 2\pi n \quad (n \in \mathbb{Z})$$

と  $n$  の取り方だけ自由度がある. 但し  $\log r$  は (普通の意味での) 正の実数の対数.  $n$  の値を選ぶことを対数関数  $\log z$  の枝 (branch) を選ぶという. これをより正確に述べたのが次の定理である.

**定理 5.2.1.**  $\Omega \subset \mathbb{C}$  を単連結領域であって  $1 \in \Omega$  かつ  $0 \notin \Omega$  なるものとする. このとき次の三条件を満たす  $\Omega$  上の関数  $\text{Log}_\Omega$  が存在する. そして関数  $\text{Log}_\Omega$  を  $\Omega$  での対数関数の枝と呼ぶ.

- (i)  $\text{Log}_\Omega$  は  $\Omega$  上正則.
- (ii)  $z \in \Omega$  なら  $e^{\text{Log}_\Omega z} = z$ .
- (iii)  $r \in \mathbb{R}_{>0} \cap \Omega$  なら  $\text{Log}_\Omega r = \log r$ .

**証明.**  $z \in \Omega$  に対して

$$\text{Log}_\Omega z := \int_C \frac{dw}{w}$$

と定義する. 但し  $C$  は 1 を始点とし  $z$  を終点とする  $\Omega$  内の区分的に滑らかな曲線. ( $0 \notin \Omega$  より積分が well-defined で, 定理 5.1.2 より  $\text{Log}_\Omega z$  は  $C$  の選び方に依存しないことに注意する.) この  $\text{Log}_\Omega$  が三条件を満たすことを確認する.

- (i) 定理 5.1.5 の証明と同じ議論により,  $\text{Log}_\Omega$  は  $\Omega$  上正則で  $(\text{Log}_\Omega z)' = 1/z$  を満たす. これで (i) が示せた.
- (ii)  $(\text{Log}_\Omega z)' = 1/z$  より

$$(ze^{-\text{Log}_\Omega z})' = e^{-\text{Log}_\Omega z} - z \cdot (\text{Log}_\Omega z)' e^{-\text{Log}_\Omega z} = (1 - z \cdot (\text{Log}_\Omega z)') e^{-\text{Log}_\Omega z} = 0.$$

よって系 2.2.4 より  $ze^{-\text{Log}_\Omega z}$  は定数で,  $z = 1$  での値をみることで証明が終わる.

- (iii)  $z = r \in \mathbb{R}_{>0} \cap \Omega$  の場合は積分路  $C$  を実軸上の線分にとれて, その場合は正の実数の対数  $\log r$  の積分表示に一致する:

$$\log r = \int_1^r \frac{dx}{x}.$$

□

**補題 5.2.2.** 単連結領域  $\Omega := \mathbb{C} \setminus \{(-\infty, 0]\}$  での対数関数の枝として

$$\text{Log}_\Omega z = \log r + i\theta, \quad (z = re^{i\theta}, |\theta| < \pi)$$

が取れる. これを対数の主値 (principal value) または主枝 (principal branch) とよび, 単に  $\text{Log} z$  と書く.

**証明.** 実際に積分で主値が得られることを示す.  $z = re^{i\theta}$ ,  $|\theta| < \pi$  に対して, 1 から  $r$  への線分と  $r$  から  $re^{i\theta}$  への原点中心, 半径  $r$  の弧  $\eta$  からなる積分路を考えると

$$\text{Log}_\Omega z = \int_1^r \frac{dx}{x} + \int_\eta \frac{dw}{w} = \log r + \int_0^\theta \frac{ire^{it}}{re^{it}} dt = \log r + i\theta.$$

□

## 参考文献

[今吉] 今吉洋一, 複素関数概説, サイエンス社 (1997).

[SS] E. M. Stein, R. Shakarchi, *Complex Analysis*, Princeton lectures in Analysis II, Princeton University Press (2003);

日本語訳: エリアス・M. スタイン, ラミ・シャカルチ著, 新井仁之, 杉本充, 高木啓行, 千原浩之訳, プリンストン解析学講義 II 複素解析, 日本評論社 (2009).

以上です.