現代数学基礎 CⅢ　10 月 24 日分演習問題[*1]

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp
https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida/2019WC3.html

4　Cauchy の積分定理 1

4.2　Cauchy の積分定理

問題 4.1. $\xi \in \mathbb{R}$ に対して次の等式を示そう.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} e^{-2\pi i x\xi}\,dx \;=\; e^{-\pi\xi^2}.$$

以下 $f(z) := e^{-\pi z^2}$ とする. ひとまず $\xi > 0$ と仮定し, $R \in \mathbb{R}_{>0}$ として積分路 γ_R を次の図のようにとる.

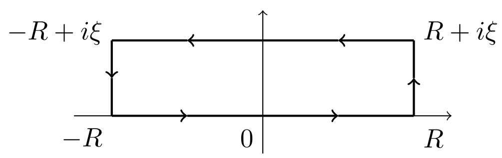

図 4.1　積分路 γ_R

長方形の場合の Cauchy の積分定理 (系 4.1.3) より

$$0 \;=\; \int_{\gamma_R} f(z)dz \;=\; \int_{-R}^{R} e^{-\pi x^2}\,dx + V_r(R) + V_l(R) + \int_{R}^{-R} f(x+i\xi)\,dx \tag{4.1}$$

となる. 但し $V_l(R)$ と $V_r(R)$ はそれぞれ左辺および右辺での積分.

(1) R によらない $C \in \mathbb{R}_{>0}$ で $|V_l(R)|, |V_r(R)| \le Ce^{-\pi R^2}$ と評価できることを示せ.

(2) 式 (4.1) で $R \to \infty$ として次の等式を示せ.

$$0 \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2}\,dx - e^{\pi\xi^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} e^{-2\pi i x\xi}\,dx.$$

(3) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2}\,dx = 1$ を示し, $\xi \ge 0$ の場合の結論を導け.

(4) $\xi < 0$ の場合を示せ.

問題 4.2. 同様に

$$\int_0^{\infty} \frac{1-\cos x}{x^2}dx \;=\; \frac{\pi}{2}$$

を導こう. 図 4.2 の積分路上で $(1-e^{iz})/z^2$ の積分を考える. 内側の半円周部を C_r^-, 外側の半円周部を C_R^+ と書くと, Cauchy の積分定理から

$$\int_{-R}^{-r} \frac{1-e^{ix}}{x^2}\,dx + \int_{C_r^-} \frac{1-e^{iz}}{z^2}\,dz + \int_{r}^{R} \frac{1-e^{ix}}{x^2}\,dx + \int_{C_R^+} \frac{1-e^{iz}}{z^2}\,dz \;=\; 0. \tag{4.2}$$

[*1] 2019/05/01 版, ver. 0.1.

この等式で $R \to \infty$, $r \to 0$ の極限を取ることを考える.

(1) C_R^+ 上の積分が $R \to \infty$ で 0 に収束することを示せ.

(2) C_r^- 上の積分が $r \to 0$ で $-\pi$ となることを示せ.

(3) 以上を使って結論を導け.

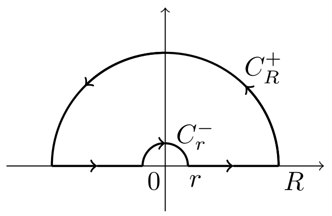

図 4.2 問題 4.2 の積分路

4.3 Cauchy の積分定理

問題 4.3 (平均定理)**.** $a \in \mathbb{C}$, $R \in \mathbb{R}_{>0}$ とし, f を開円盤 $D_a(R) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-a| < R\}$ 上の正則関数とする. このとき, $0 < r < R$ なる任意の実数 r に対して次の等式が成立することを示せ.

$$f(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a + re^{it})\, dt.$$

問題 4.4. a と b を正の実数とする.

(1) E をパラメータ付け $z(t) = a\cos t + ib\sin t$ $(0 \leq t \leq 2\pi)$ を持つ曲線, C をパラメータ付け $z(t) = be^{it}$ $(0 \leq t \leq 2\pi)$ を持つ曲線とする. このとき $\int_E dz/z = \int_C dz/z$ となることを示せ.

(2) (1) を用いて $\int_0^\pi (a^2\cos^2 t + b^2 \sin^2 t)^{-1} dt$ の値を求めよ.

レポート問題

レポート問題 4.1 ([SS, Chapter 2, Exercise 7])**.** $D := D_0(1)$ を原点中心で半径 1 の開円板とし, f を D 上の正則関数とする.

(1) $0 < r < 1$ なる実数 r に対し $2f'(0) = (2\pi i)^{-1}\int_{|\zeta|=r} \zeta^{-2}(f(\zeta) - f(-\zeta))\, d\zeta$ となることを示せ.

(2) $d := \sup_{z,w \in D} |f(z) - f(w)|$ とすると, $2\,|f'(0)| \leq d$ となることを示せ.

参考文献

[SS] E. M. Stein, R. Shakarchi, *Complex Analysis*, Princeton lectures in Analysis Ⅱ, Princeton University Press (2003);
日本語訳: エリアス・M. スタイン, ラミ・シャカルチ著, 新井仁之, 杉本充, 高木啓行, 千原浩之訳, **プリンストン解析学講義 Ⅱ 複素解析**, 日本評論社 (2009).

以上です.