現代数学基礎 CⅢ　10 月 24 日分演習解答[*1]

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp
https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida/2019WC3.html

4　Cauchy の定理 1

4.2　Cauchy の定理

問題 4.1. 被積分関数を $f(x) := e^{-\pi x^2}$ と略記する.

(1) $V_r(R)$ については[*2]

$$
\begin{aligned}
|V_r(R)| &= \left|\int_0^\xi f(R+iy)i\,dy\right| = \left|\int_0^\xi e^{-\pi(R^2+2iRy-y^2)}\,dy\right| \\
&= \int_0^\xi e^{-\pi(R^2-y^2)}\,dy \le e^{-\pi R^2}\int_0^\xi e^{-\pi y^2}\,dy \le e^{-\pi R^2}\int_0^\xi 1\,dy = \xi e^{-\pi R^2}.
\end{aligned}
$$

$V_l(R)$ については, $V_r(R)$ の議論で $R \mapsto -R$ とすれば同じ評価ができる.

(2) 次の計算から従う.

$$\int_R^{-R} f(x+i\xi)\,dx = -e^{\pi\xi^2}\int_{-R}^R e^{-\pi x^2}e^{-2\pi i x\xi}\,dx.$$

(3) $I := (\int_{-\infty}^\infty e^{-\pi x^2}\,dx)^2 = \int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty e^{-\pi(x^2+y^2)}\,dxdy$ で $(x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ と変数変換して $I = \int_0^\infty\int_0^{2\pi} re^{-\pi r^2}drd\theta = 1$. よって $\int_{-\infty}^\infty e^{-\pi x^2}\,dx = \sqrt{I} = 1$.

(4) 積分路の図が実軸より下になるだけで, $\xi > 0$ の場合と全く同じ議論で結論が得られる.

問題 4.2. 被積分関数を $f(z) := (1-e^{iz})/z^2$ と書く.

(1) $\left|(1-e^{iz})/z^2\right| \le 2/|z|^2$ より

$$\left|\int_{C_R^+} f(z)\,dz\right| \le \int_{C_R^+}\frac{2}{|z|^2}\,dz = \frac{2}{R^2}\cdot\pi R = \frac{2\pi}{R}$$

と評価できるので, $R \to \infty$ で 0 に収束する.

(2) $z \to 0$ で有界な関数 $E(z)$ 用いて $f(z) = -iz/z^2 + E(z)$ と書けるので, C_r^- を $z = re^{i\theta}$, $\theta : \pi \to 0$ とパラメーター付けすると

$$\int_{C_r^-}\frac{1-e^{iz}}{z^2}\,dz = \int_\pi^0\left(\frac{-i}{re^{i\theta}} + E(re^{i\theta})\right)ire^{i\theta}\,d\theta = \int_\pi^0 d\theta + ir\int_\pi^0 E(re^{i\theta})e^{i\theta}\,d\theta.$$

$|E(z)| < B$ とすれば $\left|\int_\pi^0 E(re^{i\theta})e^{i\theta}d\theta\right| \le B\int_0^\pi d\theta = 2\pi B$ なので, $r \to 0$ で

$$\int_{C_r^-}\frac{1-e^{iz}}{z^2}\,dz \longrightarrow \int_\pi^0 d\theta = -\pi.$$

[*1] 2019/10/24, ver. 0.2.
[*2] ver. 0.2 で修正しました.

(3) 以上より (4.2) の極限は

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1-e^{ix}}{x^2}\,dx + \int_{0}^{\infty} \frac{1-e^{ix}}{x^2}\,dx = \pi.$$

あとは $\cos x = (e^{ix}+e^{-ix})/2$ より結論を得る．

4.3 Cauchy の積分定理

問題 4.3. 開円盤 $D_a(R)$ の境界に正の向き付けを入れた曲線を C とする．示すべき等式は, Cauchy の積分公式 $f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)/(z-a)\,dz$ を C のパラメータ表示 $z(t) = a + re^{it}$ で書き換えたものである．

問題 4.4. (1) E と C で囲まれた領域を D とすると, D の境界に正の向き付けを入れた曲線 ∂D^+ は $E \cup C^-$ もしくは $E^- \cup C$ となる．D では $1/z$ は正則だから, Cauchy の積分定理より $\int_{\partial D^+} dz/z = 0$. あとは $\int_{\partial D^+} = \int_E - \int_C$ または $\int_{\partial D^+} = \int_C - \int_E$ より結論が従う．

(2) (1) の $\int_E dz/z$ をパラメータ付け $z(t) = a\cos t + ib\sin t$ を用いて計算すると

$$\int_E \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{-a\sin t + ib\cos t}{a\cos t + ib\sin t} dt = \int_0^{2\pi} \frac{(b^2-a^2)\cos t\sin t + iab}{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t} dt.$$

一方で $\int_C \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} i\,dt = 2\pi i$. そこで $\int_E dz/z = \int_C dz/z$ の虚部を比較すれば $\int_0^{2\pi} ab/(a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t)\,dt = 2\pi i$. よって求める積分は

$$\int_0^{\pi} \frac{dt}{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t} = \frac{\pi}{ab}.$$

以上です．