現代数学基礎 CⅢ　10 月 24 日分講義ノート[*1]

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp
`https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida/2019WC3.html`

4　Cauchy の積分定理 1

$\mathbb{N} := \{0, 1, 2, \ldots\}$ は非負整数全体の集合を表す. 前回までと同様, 複素数値関数のことを単に関数と呼ぶ. また開集合または閉集合といったら §1.1 の意味での $\mathbb{C}$ の開集合または閉集合のことを意味するものとする.

今回の内容は [SS, Chapter 2, §§1–4] に基づく. 教科書 [今吉, §4.3, §5.1] や前期の講義ノート [吉田, §4.1] も参照のこと.

4.1　Goursat の定理

Jordan の閉曲線定理を思い出そう.

事実 4.1.1 (Jordan の閉曲線定理)**.** $\Gamma \subset \mathbb{C}$ を (§2.1 の意味での) 区分的に滑らかな単純閉曲線 (で長さ正のもの) とする. このとき $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ は二つの連結開集合からなる. そのうち一つは有界かつ単連結 (次回の定義 5.1.3 を参照[*2]) であり, それを Γ の**内部** (interior) と呼ぶ. もう一つの連結成分は非有界であり, それを Γ の**外部** (exterior) と呼ぶ.

この定理の証明はしない. 例えば [SS, Appendix B.2] を参照せよ.

$\mathbb{C}$ 上の n **角形**とは, §2.1 の意味で区分的に滑らかな単純閉曲線であって n 本の (長さ有限の) 直線からなるもののこととする. Jordan の閉曲線定理 (事実 4.1.1) より n 角形 $P \subset \mathbb{C}$ には内部と外部がある.

定理 4.1.2 (Goursat[*3]の定理)**.** $\Omega \subset \mathbb{C}$ を開集合とし, $T \subset \Omega$ を三角形であってその内部が Ω に含まれるものとする. f が Ω で正則な関数なら

$$\int_T f(z)dz \;=\; 0.$$

証明. $T = T^{(0)}$ と書き直す. $T^{(0)}$ の各辺の中点を結ぶことで $T^{(0)}$ の内部を四つの三角形に分割できるが, それらを $T^{(1)}_1, \ldots, T^{(1)}_4$ と名付ける. 但し各 $T^{(1)}_j$ の向き付けは $T^{(0)}$ の向き付けに合わせる (下図 4.1 参照. 但し $T^{(1)}_1$ の向きは図の矢印と逆に取る).

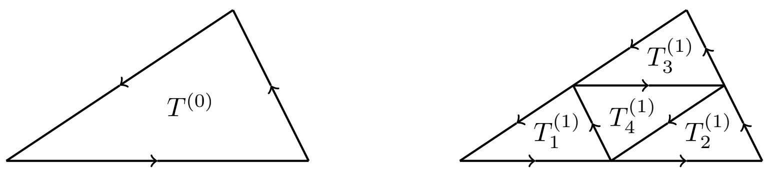

図 4.1　$T^{(0)}$ の分割

このとき $\int_{T^{(0)}} f(z)\,dz = \sum_{j=1}^{4} \int_{T^{(1)}_j} f(z)\,dz$ なので, ある j について $\left|\int_{T^{(0)}} f(z)\,dz\right| \leq 4\left|\int_{T^{(1)}_j} f(z)\,dz\right|$. この $T^{(1)}_j$ を改めて $T^{(1)}$ と書く. 以上の操作を今度は $T^{(1)}$ に施して $T^{(2)}$ を得る. 繰り返して, 三角形の列

[*1] 2019/10/24, ver. 0.3.
[*2] ver. 0.3 で追記しました.
[*3] フランスの数学者で, カタカナだとグルサーと書くのが発音上正しいと思います.

$T^{(0)}, T^{(1)}, \dots$ で

$$\left|\int_{T^{(0)}} f(z)\,dz\right| \le 4^n \left|\int_{T^{(n)}} f(z)\,dz\right|$$

を満たすものが取れた．また $T^{(n)}$ の外接円の直径を $d^{(n)}$ と書くと[*4] $d^{(n)} = 2^{-n}d^{(0)}$ となる．

一方, ある $z_0 \in \Omega$ が存在して, 任意の n について z_0 は $T^{(n)}$ の内部または境界にある．$f(z)$ は正則だったから, $z \to z_0$ で $\psi(z) \to 0$ となる関数 $\psi(z)$ を用いて

$$f(z) \,=\, f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \psi(z)(z - z_0)$$

と書ける．両辺を $T^{(n)}$ 上で積分して $\int_{T^{(n)}} f(z)\,dz = 0 + 0 + \int_{T^{(n)}} \psi(z)(z - z_0)\,dz$ を得る．ここで $c_n := \sup_{z \in T^{(n)}} |\psi(z)|$ とすれば, $z \in T^{(n)}$ なら $|z - z_0| \le d^{(n)}$ なので

$$\left|\int_{T^{(n)}} \psi(z)(z - z_0)\,dz\right| \le c_n d^{(n)} \ell(T^{(n)}) \,=\, 4^{-n} c_n d^{(0)} \ell(T^{(0)}).$$

よって

$$\left|\int_{T^{(0)}} f(z)\,dz\right| \le c_n d^{(0)} \ell(T^{(0)}).$$

$n \to \infty$ で $c_n \to 0$ となるので, これで証明が終わった．□

系 4.1.3. 開集合 $\Omega \subset \mathbb{C}$ が多角形 P とその内部を含むなら, Ω 上で正則な関数 f について

$$\int_P f(z)dz \,=\, 0.$$

証明．P (とその内部) を三角形に分割して各々に Goursat の定理 4.1.2 を用いれば求める積分は 0 の和．□

4.2 Cauchy の積分定理

f を開集合 Ω 上の関数とする．Ω 上での f の**原始関数**とは, Ω 上の正則関数 F であって任意の $z \in \Omega$ に対して $F'(z) = f(z)$ となるもののことであった．

定理 4.2.1. 開円板 D 上の正則関数は D における原始関数を持つ．

証明．D の中心を c と書く．任意の $z \in D$ に対して $w := c + \mathrm{Re}(z - c)$ とし, 線分 $\overrightarrow{cw}$ と $\overrightarrow{wz}$ からなる D 上の区分的に滑らかな曲線を C_z と書く．そして

$$F(z) \,:=\, \int_{C_z} f(w)\,dw$$

と定める．Goursat の定理 4.1.2 とその系 4.1.3 を使うことで, $z + h \in D$ となる任意の複素数 h に対して

$$F(z + h) - F(z) \,=\, \int_\eta f(w)\,dw$$

と書ける．但し $\eta := \overrightarrow{z(z+h)}$ は線分．f は z で連続だから, $w \to z$ で $\psi(w) \to 0$ となる関数 ψ を用いて $f(w) = f(z) + \psi(w)$ と書ける．すると $F(z + h) - F(z) = f(z)h + \int_\eta \psi(w)\,dw$．ここで $\left|\int_\eta \psi(w)\,dw\right| \le \sup_{w \in \eta} |\psi(w)| \cdot |h|$．よって

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(z + h) - F(z)}{h} \,=\, f(z),$$

つまり F は f の原始関数である．□

[*4] ver. 0.3 で修正しました．

定理 4.2.2 (円板の場合の Cauchy の積分定理)**.** 開円板 D 上の任意の正則関数 f と D 上の任意の区分的に滑らかな閉曲線 C に対して

$$\int_C f(z)dz = 0.$$

証明. 定理 4.2.1 より f は原始関数を持つので, §2.2 の系 2.2.3 より結論を得る. □

円板以外の場合でも定理 4.2.2 の主張が成立する場合, それを **Cauchy の積分定理**と総称する. 次の形のものが最も一般的な Cauchy の積分定理である.

定理 4.2.3 (Cauchy の積分定理 [今吉, 定理 4.5])**.** 区分的に滑らかな単純閉曲線の内部 Ω (事実 4.1.1 の Jordan の閉曲線定理を参照) 上の正則関数 f と Ω 上の区分的に滑らかな閉曲線 C に対して

$$\int_C f(z)\,dz = 0.$$

この定理の証明はしない. [SS, Appendix B §2.1] を参照せよ.

実用上は図 4.2 にあるような積分路に関して Cauchy の積分定理を用いる. ここに挙げているものに関する Cauchy の定理は定理 4.2.2 と同じ方針で証明できる.

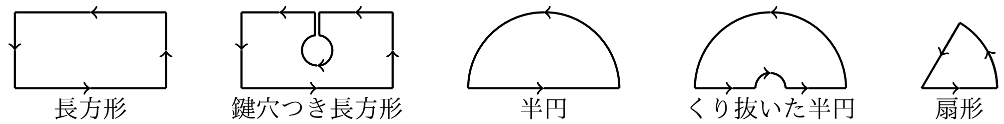

図 4.2　積分路の例

4.3　Cauchy の積分公式

開円板 $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-a| < r\}$ に対し $\overline{D} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z-a| \le r\}$ を D の**閉包** (closure) と呼び, $\partial D := \{z \in \mathbb{C} \mid |z-a| = r\} = \overline{D} \setminus D$ を D の**境界** (boundary) あるいは円周と呼ぶ.

また, 中心 $a \in \mathbb{C}$, 半径 r の**正の向きの円周**とは, パラメータ付き曲線

$$[0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \theta \longmapsto a + re^{i\theta}$$

が定める曲線のことを言う. また**負の向きの円周**とは正の向きの円周の逆向きの曲線のことをいう.

定理 4.3.1 (Cauchy の積分公式 [今吉, 定理 5.1])**.** $D \subset \mathbb{C}$ を開円板とし, 開集合 $\Omega \subset \mathbb{C}$ は D の閉包 $\overline{D}$ を含むものとする. ∂D に正の向きを入れたものを ∂D^+ と書く. この時, 任意の Ω 上の正則関数 f と任意の $z \in D$ に対して

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D^+} \frac{f(w)}{w-z}dw.$$

証明. 任意に $z \in D$ を選んで固定する. $\Gamma_{\delta,\varepsilon}$ を下図 4.3 のような積分路とする. 但し δ は帯部分の幅とし, ε は内円の半径とする.

この積分路で $F(w) := f(w)/(w-z)$ を積分すると, Cauchy の積分定理から $\int_{\Gamma_{\delta,\varepsilon}} F(w)\,dw = 0$. ここで $\delta \to 0$ の極限を取ると, 帯部分の積分は打ち消しあって 0 になる. また内円部は中心 z で半径 ε の負の向きの円周 C_ε^- 上での積分になり, 外円部は ∂D^+ 上での積分になる. 従って

$$\int_{C_\varepsilon^-} F(w)\,dw + \int_{\partial D^+} F(w)\,dw = 0.$$

ここで

$$F(w) = \frac{f(w)-f(z)}{w-z} + \frac{f(z)}{w-z}$$

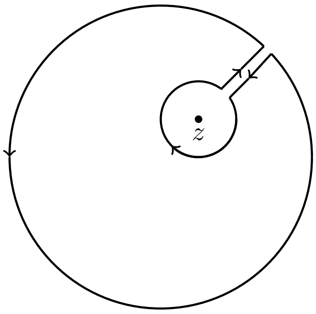

図 4.3　積分路 $\Gamma_{\delta,\varepsilon}$

と変形する. f が正則なので, 適当な $B \in \mathbb{R}_{>0}$ があって任意の $w \in C_\varepsilon^-$ に対して $\left|\frac{f(w)-f(z)}{w-z}\right| \le B$. 従って $\left|\int_{C_\varepsilon^-} \frac{f(w)-f(z)}{w-z} dw\right| \le 2\pi\varepsilon B$. また C_ε^- を $w(\theta) = z + \varepsilon e^{-i\theta}$, $\theta : 0 \to 2\pi$ とパラメータ付けすると

$$\int_{C_\varepsilon^-} \frac{f(z)}{w-z} dw \;=\; f(z) \int_0^{2\pi} \frac{-\varepsilon i e^{-i\theta}}{\varepsilon e^{-i\theta}} d\theta \;=\; -2\pi i f(z)$$

従って $\varepsilon \to 0$ の極限で

$$-2\pi i f(z) + \int_{\partial D^+} F(w)\, dw \;=\; 0$$

で結論を得る. □

系 4.3.2 (高階導関数に関する Cauchy の積分公式 [今吉, 系 5.1])**.** 定理 4.3.1 と同じ仮定のもと, 任意の $z \in D$ と $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$f^{(n)}(z) \;=\; \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial D^+} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} dw.$$

証明. n に関する帰納法で示す. $n = 0$ の時は定理 4.3.1 に他ならない. 次に f が $(n-1)$ 回複素微分可能であり $f^{(n-1)}(z) = \frac{(n-1)!}{2\pi i} \int_{\partial D^+} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} dw$ だと仮定する. $h \in \mathbb{C}$ は十分小さくて $z + h \in I$ だとすると,

$$\begin{aligned}
\frac{f^{(n-1)}(z+h) - f^{(n-1)}(z)}{h} \;&=\; \frac{(n-1)!}{2\pi i} \int_{\partial D^+} \frac{f(w)}{h} \left(\frac{1}{(w-z-h)^n} - \frac{1}{(w-z)^n} \right) dw \\
=\; \frac{(n-1)!}{2\pi i} \int_{\partial D^+} \frac{f(w)}{h} \frac{(A+h)^n - A^n}{A^n (A+h)^n} dw \;&=\; \frac{(n-1)!}{2\pi i} \int_{\partial D^+} \frac{f(w)}{h} \frac{nhA^n + \cdots + h^n}{A^n (A+h)^n} dw \\
\xrightarrow{h \to 0} \frac{(n-1)!}{2\pi i} \int_{\partial D^+} f(w) \frac{n(w-z)^{n-1}}{(w-z)^{2n}}\, dw \;&=\; \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial D^+} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}\, dw
\end{aligned}$$

となって示せた. 但し $A := w - z - h$ と略記し, また一様収束の場合の積分と極限の順序交換を用いた. □

参考文献

[今吉] 今吉洋一, **複素関数概説**, サイエンス社 (1997).

[SS] E. M. Stein, R. Shakarchi, *Complex Analysis*, Princeton lectures in Analysis Ⅱ, Princeton University Press (2003);
日本語訳: エリアス・M. スタイン, ラミ・シャカルチ著, 新井仁之, 杉本充, 高木啓行, 千原浩之訳, **プリンストン解析学講義 Ⅱ 複素解析**, 日本評論社 (2009).

[吉田] 吉田伸夫, **複素関数論**, 前期講義「複素関数論」の講義ノート (2019).

以上です.