現代数学基礎 CⅢ　10 月 17 日分演習問題[*1]

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp
`https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida/2019WC3.html`

3　等角写像

3.1　曲線の接ベクトル

問題 3.1. 講義ノートの注意 3.1.1 を示せ. つまり, 複素平面上の滑らかな曲線の上の点における接ベクトルについて,

(1) 長さが 0 になることはないことを示せ.
(2) その方向ベクトルは曲線のパラメータ表示に依存しないことを示せ.

3.3　等角写像の例

問題 3.2. 講義ノートの補題 3.3.1, つまり等角写像の合成は等角写像であることを示せ.

問題 3.3. 講義ノートの補題 3.3.2 のうち以下の関数について像を記述せよ. また (4), (6) については講義ノートの図 3.1 や図 3.2 にならって, 直交座標や極座標が一定の曲線の像のグラフを描き, 等角写像であることを確認せよ.

(3) 上半円板 $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1, \mathrm{Im}(z) > 0\}$ を定義域とする関数 $(1+z)/(1-z)$.
(4) 上半平面 $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$ を定義域とする関数 $\log z$.
(6) 帯状領域の上半分 $\{z \in \mathbb{C} \mid |\mathrm{Re}(z)| < \pi/2,\ \mathrm{Im}(z) > 0\}$ を定義域とする関数 e^{iz}.
(7) 上半円板 $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1, \mathrm{Im}(z) > 0\}$ を定義域とする関数 $-(z+z^{-1})/2$.
(8) 帯状領域の上半分 $\{z \in \mathbb{C} \mid |\mathrm{Re}(z)| < \pi/2,\ \mathrm{Im}(z) > 0\}$ を定義域とする関数 $\sin z$.

3.4　その他の問題

問題 3.4 (正則関数と調和関数)**.** $z = x + iy$ を複素変数の実部と虚部への分解とする.

(1) $\Delta := \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ を**ラプラシアン** (Laplacian) と呼ぶ. 以下の等式を示せ.

$$\Delta \;=\; 4\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \overline{z}} \;=\; 4\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\frac{\partial}{\partial z}.$$

(2) $\Delta h(x,y) = 0$ となる実二変数の実関数 $h(x,y)$ を**調和関数** (harmonic function) と呼ぶ. $f(z)$ が開集合 Ω 上の正則関数のとき, f の実部と虚部はそれぞれ二変数 x, y に関する調和関数であることを示せ.

[*1] 2019/10/17, ver. 0.2.

問題 3.5 (級数に関する Abel の定理). (1) $\{a_n\}_{n=1}^N$ と $\{b_n\}_{n=1}^N$ を複素数の有限列とする. $B_0 := 0$, $B_k := \sum_{n=1}^k b_n$ $(k = 1, \ldots, N)$ とする. このとき次の等式を示せ.

$$\sum_{n=M}^{N} a_n b_n \;=\; a_N B_N - a_M B_{M-1} - \sum_{n=M}^{N-1} (a_{n+1} - a_n) B_n.$$

(2) $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ は複素数列であって級数和 $\sum_{n=1}^\infty a_n$ が収束するものとする. (1) を用いて次の等式を示せ.

$$\lim_{r \to 1-0} \sum_{n=1}^{\infty} r^n a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

問題 3.6. 以下の関数 f と積分路 C に対して複素積分 $\int_C f(z)\,dz$ の値を求めよ.

(1) $f(z) = \mathrm{Log}\, z,\ \ C : z(t) = e^{it}\ (-\pi/2 \le t \le \pi/2)$.

(2) $f(z) = 1/z,\ \ C$: 1 から i への線分.

レポート問題

レポート問題 3.1. 実数成分で行列式が 1 である二次正方行列全体を $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ と書く:

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \;:=\; \left\{ M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b, c, d \in \mathbb{R},\ \det(M) = 1 \right\}.$$

$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ に対し関数 f_M を

$$f_M(z) := \frac{az + b}{cz + d}$$

で定める (但し分母が 0 になる場合は考えないことにする).

(1) $M, N \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ として, 写像の合成 $f_M \circ f_N$ は f_{MN} に等しいことを示せ. 但し MN は行列の積.

(2) f_M は上半平面 $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$ をそれ自身に写す等角写像であることを示せ.

実は (2) の逆が成立する: つまり $\mathbb{H}$ からそれ自身への任意の等角写像は f_M, $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ の形にかける. このことと上の (1), (2) から次の事実が従う: $\mathrm{Aut}(\mathbb{H})$ で $\mathbb{H}$ から自分自身への等角写像のなす群を表すことにすると, 群の同型

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})/\{\pm 1\} \;\simeq\; \mathrm{Aut}(\mathbb{H})$$

が成立する*2.

以上です.

*2 ver. 0.2 で訂正しました.