現代数学基礎 CⅢ　10 月 17 日分演習解答[*1]

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp
`https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida/2019WC3.html`

3 等角写像

3.1 曲線の接ベクトル

問題 3.1. (1) 滑らかな曲線パラメータ付け p の定義から $p'(t) \neq 0$ なので, 対応するベクトルの長さは正.

(2) $q(s)$ を他のパラメータ付けとすると, 連続微分可能な関数 $s(t)$ があって $q(s(t)) = p(t)$ かつ $s'(t) > 0$. $s_0 = s(t_0)$ とすると連鎖率から $q'(s_0) = p'(t_0)/s'(t_0)$. $s'(t_0)$ は正の実数だから, 方向ベクトル $q'(s_0)/|q'(s_0)|$ と $p'(t_0)/|p'(t_0)|$ は一致する.

3.3 等角写像の例

問題 3.2. 関数 f が z_0 で, 関数 g が $f(z_0)$ で等角写像だと仮定する. 定理 3.2.1 より f と g はともに正則関数であり, 正則関数の合成は正則関数なので, $g \circ f$ は正則. また合成関数の微分の連鎖率 $(g \circ f)'(z) = g'(f(z))f'(z)$ と定理 3.2.1 より $g'(f(z_0)) \neq 0$ かつ $f'(z_0) \neq 0$ なので, $(g \circ f)'(z_0) \neq 0$. 再び定理 3.2.1 より $g \circ f$ は z_0 で等角写像である.

問題 3.3. (3) $z = x + iy$ とすると

$$w = (1+z)/(1-z) = \frac{1-(x^2+y^2)}{(1-x)^2+y^2} + i\frac{2y}{(1-x)^2+y^2}.$$

よって像は第一象限 $\{w = u + iv \mid u > 0, v > 0\}$. なお極座標にそった曲線の像は図 1 のようになる.

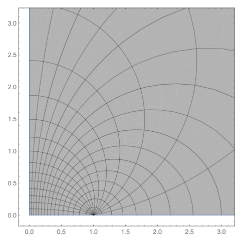

図 1　関数 $(1+z)/(1-z)$ による極座標の像

(4) $z = re^{i\theta}$ と極座標表示すると, $z \in \mathbb{H} \iff r > 0,\ 0 < \theta < \pi$. このとき $\log z = \log r + i\theta$ だから, 像は帯状領域 $\{x + iy \mid 0 < y < \pi\}$ になる. θ が一定の半直線は x 軸に平行な $\{x + i\theta \mid x \in \mathbb{R}\}$ に写り, r が一定の半円は y 軸に平行な $\{\log r + i\theta \mid 0 < \theta < \pi\}$ に写る[*2].

[*1] 2019/10/24, ver. 0.3.
[*2] ver. 0.3 で訂正しました.

(6) $z = x + iy$ とすれば $e^{iz} = e^{ix}e^{-y}$. よって像は $\{w = re^{i\theta} \mid -\pi/2 < \theta < \pi/2, 0 < r < 1\}$, つまり半径 1 の円板の右半分[*3]. $0 < y < 2$ の範囲で x 軸または y 軸と並行な直線の像を描くと図 2 のようになる.

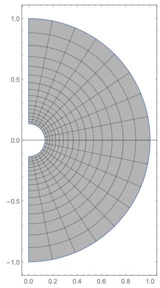

図 2　関数 e^{iz} による直交座標格子の像

(7) $z = re^{i\theta}$ とすると $0 < r < 1$ かつ $0 < \theta < \pi$. $w = -(z + 1/z)/2 = -(r + 1/r)/2 \cdot \cos\theta - i(r - 1/r)/2 \cdot \sin\theta$ より, 像は上半平面 $\mathbb{H}$. なお極座標に沿った曲線の像を描くと図 3 のようになる.

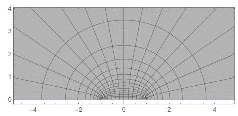

図 3　関数 $-(z + 1/z)/2$ による極座標の像

(8) $\zeta = e^{iz}$ とすると $\sin z = (e^{iz} - e^{-iz})/2i = -(i\zeta + 1/i\zeta)/2$. よってこの写像は, (6) の写像の後に i をかける写像を合成し更に (7) の写像を合成したものと一致する. 従って像は上半平面 $\mathbb{H}$.

3.4　その他の問題

問題 3.4.　(1) 偏微分の順序交換 $\partial_x\partial_y = \partial_y\partial_x$ を許すことにする[*4]. $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y}\right)$, $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y}\right)$ より $4\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \Delta$. $4\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\frac{\partial}{\partial z} = \Delta$ も同様に確かめることができる.

(2) f は正則なので $\partial f/\partial\bar{z} = 0$. よって (1) より $\Delta f = 0$. 特に $f = u + iv$ と分解すれば $\Delta u = \Delta v = 0$. なお[*5] 正則関数について偏微分が交換できることは, 正則関数が級数展開を持つこと (11/7 の講義ノートの定理 6.1.2) と級数の定める関数が何回でも複素微分可能であること (10/3 の定理 1.4.9) から従う.

問題 3.5.　(1) N に関する帰納法で示す. $N = M$ の場合は左辺は $a_M b_M$, 右辺は $a_M B_M - a_M B_{M-1} = a_M(B_M - B_{M-1}) = a_M b_M$ なので確かに一致する. N まで示せたとして, $N + 1$ の時

$$\begin{aligned}
\textstyle\sum_{n=M}^{N+1} a_n b_n &= a_{N+1}b_{N+1} + \textstyle\sum_{n=M}^{N} a_n b_n \overset{(*)}{=} a_{N+1}b_{N+1} + a_N B_N - a_M B_{M-1} - \textstyle\sum_{n=M}^{N-1}(a_{n+1} - a_n)B_n \\
&= (a_{N+1}B_{N+1} - a_{N+1}B_N) + a_N B_N - a_M B_{M-1} - \textstyle\sum_{n=M}^{N-1}(a_{n+1} - a_n)B_n \\
&= a_{N+1}B_{N+1} - a_M B_{M-1} - \textstyle\sum_{n=M}^{N}(a_{n+1} - a_n)B_n.
\end{aligned}$$

[*3] ver. 0.2 で訂正しました.
[*4] ver. 0.2 で訂正しました.
[*5] ver. 0.2 で訂正しました.

但し $(*)$ で帰納法の仮定を用いた.

(2) 前問で a_n と b_n を取り換えて, さらに $b_n = r^n$ とする. そして $M = 1$, $N \to \infty$ とすれば $\sum_{n=1}^{\infty} r^n a_n = (1-r)\sum_{n=1}^{\infty} r^n A_n$. 但し $A_N := \sum_{n=1}^{N} a_n$. 以下 $A := A_\infty$ と書くと, 任意の $\varepsilon > 0$ について十分大きく N をとれば, $N < n$ なら $|A_n - A| < \varepsilon$ とできる. そこで $\sum_{n=1}^{\infty} r^n a_n = (1-r)\sum_{n=1}^{N} r^n A_n + (1-r)\sum_{n=N+1}^{\infty} r^n A_n$ と分けて辺々 A を引くと

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} r^n a_n - A\right| < |1-r|\left|\sum_{n=0}^{N} r^n A_n\right| + \varepsilon\frac{|1-r|}{1-|r|}$$

と評価できる. これで $r \to 1-0$ とすれば $|\sum_{n=1}^{\infty} r^n a_n - A| \to 0$ が分かる.

問題 3.6. 求める積分を I と置く.

(1) $I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} it \cdot ie^{it}\,dt = -\int_{-\pi/2}^{\pi/2} te^{it}\,dt = \left[(it-1)e^{it}\right]_{-\pi/2}^{+\pi/2} = -2i$.

(2) 不定積分が $\operatorname{Log} z$ であることから $I = [\operatorname{Log} z]_0^{2\pi} = \pi i/2$.
(または C を $z(t) = 1+i-t$ とパラメータ付けして $I = \int_0^{2\pi} -dt/(1+i-t) = [-\operatorname{Log}(1+i-t)]_0^{2\pi} = \pi i/2$ と求めても同じ.)

以上です.