

現代数学基礎 CIII 10月17日分講義ノート*¹

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)

yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp

<https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida/2019WC3.html>

3 等角写像

前回までと同様に, \mathbb{Z} は整数全体の集合, $\mathbb{N} := \{0, 1, 2, \dots\}$ は非負整数全体の集合を表す. また有理数全体の集合を \mathbb{Q} , 実数全体の集合を \mathbb{R} , 複素数全体の集合を \mathbb{C} と書く. $\mathbb{R}_{>0}$ は正の実数のなす集合を意味する.

今回の内容は [今吉, §3.4] と [SS, Chapter 8 §1] に基づく. 前回説明した複素平面 \mathbb{C} 上の (区分的に) 滑らかな曲線の定義を思い出しておくこと.

3.1 曲線の接ベクトルと等角写像

定義. C を複素平面上的滑らかな曲線とし, z_0 を C 上の点とする. $p = x + iy : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ を C のパラメータ表示とし, $t_0 \in [a, b]$ を $z_0 = p(t_0)$ なるものとする. この時, 始点を z_0 とする二次元ベクトル

$$p'(t_0) = x'(t_0) + iy'(t_0) \quad \text{ないし} \quad \begin{bmatrix} x'(t_0) \\ y'(t_0) \end{bmatrix}$$

のことを C の z_0 での (p に関する) 接ベクトルと呼ぶ.

注意 3.1.1. (1) 接ベクトルの長さは必ず正になる.

(2) この定義では接ベクトルの長さがパラメータ表示 p に依存するが, 方向ベクトル $p'(t_0)/|p'(t_0)|$ は p に依存しないことに注意する.

連続微分可能な二変数実関数 u, v から定まる複素関数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ を考える. C を複素平面上的滑らかな曲線とし, $p : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ を C のパラメータ表示とする. C (の像を含む開集合) 上で f が単射と仮定すると, $f \circ p : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ は滑らかな曲線 $f(C)$ を定める. また $z_0 = x_0 + iy_0$ は C 上の点であって $z_0 = p(t_0)$, $t_0 \in [a, b]$ なるものとする.

補題 3.1.2. 上記の記号のもと, 滑らかな曲線 $f(C)$ の点 $f(z_0)$ での ($f \circ p$ に関する) 接ベクトルは

$$\begin{bmatrix} u_x(x_0, y_0) & u_y(x_0, y_0) \\ v_x(x_0, y_0) & v_y(x_0, y_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'(t_0) \\ y'(t_0) \end{bmatrix}.$$

証明. 微分の連鎖律そのものである. □

定義. 複素平面上的滑らかな曲線 C_1 と C_2 は点 z_0 で交わるものとする. このとき, C_1 と C_2 の z_0 における角度をそれぞれの z_0 における接ベクトルのなす角度で定義する. 但し角度は C_1 の接ベクトルから C_2 の接ベクトルに向かって測るものとする.

注意 3.1.1 より交点における角度はパラメータ表示に依存しない.

*¹ 2019/10/17, ver. 0.2.

定義. 連続微分可能な複素関数 $f(z)$ が点 z_0 において等角または共形 (conformal) であるとは、以下の二条件を満たすことをいう。

- z_0 を含むある開集合上で単射.
- z_0 で交わる任意の滑らかな二曲線 C_1 と C_2 に対し、 C_1 と C_2 の z_0 における角度 θ と $f(C_1)$ と $f(C_2)$ の $f(z_0)$ における角度 φ とが等しい.

3.2 正則写像と等角写像

定理 3.2.1 (正則写像の等角性 [今吉, 定理 3.13]). 点 z_0 を含む開集合上で定義されている複素関数 $f(z)$ について、

$$f \text{ は } z_0 \text{ において等角} \iff f \text{ は } z_0 \text{ において正則かつ } f'(z_0) \neq 0.$$

証明. $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ とする. 正方行列 T を

$$T := \begin{bmatrix} u_x(x_0, y_0) & u_y(x_0, y_0) \\ v_x(x_0, y_0) & v_y(x_0, y_0) \end{bmatrix}$$

で定めると、補題 3.1.2 より

$$f \text{ が } z_0 \text{ で交わる二曲線の角度を保つ} \iff T \text{ の定める線形写像が二つのベクトルのなす角度を保つ.}$$

これと逆写像定理から

$$f \text{ が } z_0 \text{ で等角} \iff \det T \neq 0 \text{ かつ } T \text{ の定める線形写像が二つのベクトルのなす角度を保つ}$$

が分かる. 従って上記の右辺と主張の右辺がまた同値であることを示せばよい. 以下 $u_x = u_x(x_0, y_0)$ 等と略記する.

まず T の定める線形写像が角度を保つと仮定する. $e_1 := {}^t(1, 0)$ と $e_2 := {}^t(0, 1)$ のなす角度は $\pi/2$ だから $Te_1 = {}^t(u_x, v_x)$ と $Te_2 = {}^t(u_y, v_y)$ のなす角も $\pi/2$. よって $k \in \mathbb{R}_{>0}$ が存在して $Te_2 = k {}^t(-v_x, u_x)$. つまり

$$T = \begin{bmatrix} u_x & -kv_x \\ v_x & ku_x \end{bmatrix}$$

次に任意の $s \in \mathbb{R}$ について、 e_1 と $e_1 + se_2 = {}^t(1, s)$ のなす角度を θ_s とすると $\tan \theta_s = s$. 一方で Te_1 と $T(e_1 + se_2) = Te_1 + sTe_2$ のなす角度 φ_s について $\tan \varphi_s = ks$. 任意の s について $\theta_s = \varphi_s$ が成立するから $k = 1$. 以上より $(u_y, v_y) = (-v_x, u_x)$ となり、Cauchy-Riemann 方程式が成立する. つまり f は z_0 において正則. また $\det T = u_x^2 + v_x^2 \neq 0$ なので $f'(z_0) = u_x + iv_x \neq 0$ である.

次に f が z_0 で正則でかつ $f'(z_0) \neq 0$ だと仮定する. 正則性から Cauchy-Riemann 方程式が成立するので $(u_y, v_y) = (-v_x, u_x)$. また $f'(z_0) \neq 0$ より $\det T = u_x^2 + v_x^2 > 0$ である. 任意の 0 でないベクトル $V_1 := {}^t(a, b)$ と $V_2 := {}^t(c, d)$ について、 V_1 と V_2 のなす角度を θ , TV_1 と TV_2 のなす角度を φ とする.

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{V_1 \cdot V_2}{|V_1||V_2|} = \frac{ac + bd}{\sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{c^2 + d^2}}, \\ \cos \varphi &= \frac{TV_1 \cdot TV_2}{|TV_1||TV_2|} = \frac{(u_x^2 + v_x^2)(ac + bd)}{(u_x^2 + v_x^2)\sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{c^2 + d^2}} \end{aligned}$$

より内積は一致する. つまり $\theta = \pm\varphi$. $\det T > 0$ と角度の定義より (0 でなければ) $\theta = -\varphi$ は起きえないので $\theta = \varphi$. 以上より T は角度を保つ. \square

3.3 等角写像の例

次の主張は定理 3.2.1 から従う。

補題 3.3.1. 等角写像の合成は等角写像である。

この補題を用いて、あるいは定義から直接、以下の関数が等角写像であることが分かる。

補題 3.3.2. 以下の関数はその定義域の各点において等角写像である。

- (1) $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ および $h \in \mathbb{C}$ とする. \mathbb{C} を定義域とする関数 $cz + h$.
- (2) $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ として, $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \arg(z) < \pi/n\}$ を定義域とする関数 z^n .
- (3) 上半円板 $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1, \operatorname{Im}(z) > 0\}$ を定義域とする関数 $(1+z)/(1-z)$.
- (4) 上半平面 $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) > 0\}$ を定義域とする関数 $\operatorname{Log} z$.
- (5) 上半円板 $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1, \operatorname{Im}(z) > 0\}$ を定義域とする関数 $\operatorname{Log} z$.
- (6) 帯状領域の上半分 $\{z \in \mathbb{C} \mid |\operatorname{Re}(z)| < \pi/2, \operatorname{Im}(z) > 0\}$ を定義域とする関数 e^{iz} .
- (7) 上半円板 $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1, \operatorname{Im}(z) > 0\}$ を定義域とする関数 $-(z+z^{-1})/2$.
- (8) 帯状領域の上半分 $\{z \in \mathbb{C} \mid |\operatorname{Re}(z)| < \pi/2, \operatorname{Im}(z) > 0\}$ を定義域とする関数 $\sin z$.

例えば (2) で $n = 2$ の場合、つまり関数 z^2 が等角写像であることは、 $z = x + iy$ で x が一定、または y が一定の直線の像を描いてみると分かりやすい。下図 3.1 は $\{(x, j) \mid -1 \leq x \leq 1\}$ ($j = 0, 1/15, \dots, 1$) および $\{(k, y) \mid 0 \leq y \leq 1\}$ ($k = -1, \dots, -1/15, 0, 1/15, \dots, 1$) の像を描いたものである。元の z 平面で直交していた二直線が、 z^2 で写った後も直交していることが分かる。

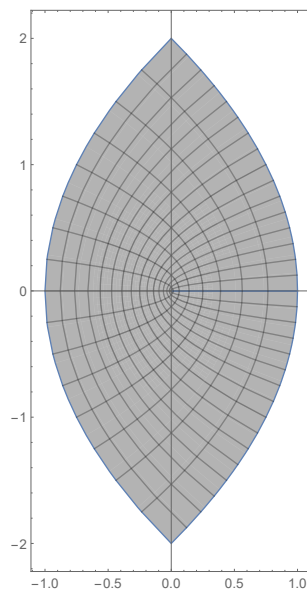
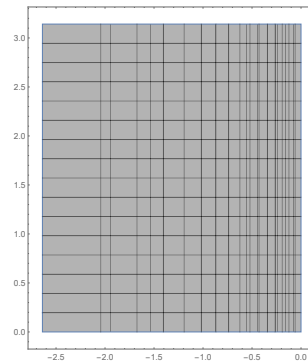


図 3.1 関数 z^2 による直交座標格子の像

(5) や (7) の場合は、直交座標 $z = x + iy$ よりも極座標 $z = re^{i\theta}$ を使って r が一定の円ないし θ が一定の半直線の像を考えたほうが簡単である。下図 3.2 は (5) の場合の $\{re^{i\theta} \mid 0 \leq r \leq 1\}$ ($\theta = 0, \pi/15, \dots, \pi$) 及び $\{re^{i\theta} \mid 0 \leq \theta \leq \pi\}$ ($r = 0, 1/15, \dots, 1$) の像である。

図 3.2 関数 $\text{Log}(z)$ による極座標の像

参考文献

[今吉] 今吉洋一, 複素関数概説, サイエンス社 (1997).

[SS] E. M. Stein, R. Shakarchi, *Complex Analysis*, Princeton lectures in Analysis II, Princeton University Press (2003);

日本語訳: エリアス・M. スタイン, ラミ・シャカルチ著, 新井仁之, 杉本充, 高木啓行, 千原浩之訳, プリンストン解析学講義 II 複素解析, 日本評論社 (2009).

以上です.