現代数学基礎 CⅢ　10 月 10 日分小テスト解答*1

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp
https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida/2019WC3.html

問題. 複素関数 $f(z) = \overline{z}$ が正則でないことを示せ.

解答. $h = \delta + i\epsilon$ と実部と虚部に分解すると, z での f の微分可能性は

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \frac{\overline{h}}{h} = \frac{\delta - i\epsilon}{\delta + i\epsilon}$$

の $h \to 0$ での極限の存在と同値. しかしこの商で $\epsilon = 0$ としたときの $\delta \to 0$ での極限は 1 であり, $\delta = 0$ としたときの $\epsilon \to 0$ での極限は -1. よって $\bigl(f(z+h) - f(z)\bigr)/h$ の $h \to 0$ での極限は存在しない.

コメント. 3 点満点で採点しました. 平均点は 2.6 点でした.

上の解答は正則関数の定義 (複素微分可能性) に沿ったものですが, もちろん, それと同値な性質を $f(z) = \overline{z}$ が満たさないことを言ってもよいです. 例えば次の別答 1 のように Cauchy-Riemann 方程式を満たしていないことを示せば良いです. 更に, 講義ノートの命題 1.3.2 ([今吉, 定理 3.10, コーシー・リーマン方程式の複素形]) を使えばもっと簡単な解答になります (別答 2).

別答 1. $f(z) = \overline{z}$ が Cauchy-Riemann 方程式を満たさないことを示せば十分. $z = x + iy$ および $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ のように実部と虚部に分けると $u(x, y) = x$, $v(x, y) = -y$. すると

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = 1 \neq \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) = -1$$

となって, 確かに Cauchy-Riemann 方程式を満たさない.

別答 2. $f(z) = \overline{z}$ が Cauchy-Riemann 方程式を満たさないことを示せば十分だが, Cauchy-Riemann 方程式は $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$ と同値. この問題の場合 $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 1 \neq 0$ だから, 確かに Cauchy-Riemann 方程式を満たさない.

参考文献

[今吉] 今吉洋一, **複素関数概説**, サイエンス社 (1997).

以上です.

*1 2019/10/10, ver. 0.1.