現代数学基礎 CⅢ　10 月 10 日分演習問題[*1]

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp
https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida/2019WC3.html

2　復習 2: 複素積分

2.1　複素平面内の曲線

問題 2.1. 集合 $S \subset \mathbb{C}$ が**弧状連結**であるとは, S の任意の二点について, それらを始点と終点とするような S 内の区分的に滑らかな曲線が存在することをいう. このとき, **空でない**[*2]**開集合 $\Omega \subset \mathbb{C}$ が弧状連結であることと連結であることは同値**である. このことを以下の手順で示せ.

(1) Ω が弧状連結な開集合であると仮定し, 背理法で連結であることを示したい. $\Omega = \Omega_1 \sqcup \Omega_2$ と互いに交わらない, 空でない開集合 Ω_i の和で書けたとする. $w_i \in \Omega_i$ $(i = 1, 2)$ を取る. 仮定より w_1 を始点とし w_2 を終点とする区分的に滑らかな曲線 C がある. そのパラメータ付けを $z : [a, b] \to \Omega$, $z(a) = w_1$, $z(b) = w_2$ とする. ここで

$$t^* := \sup\{t \in [a, b] \mid z(s) \in \Omega_1 \ (a \le \forall s < t)\}$$

とする. $z(t^*)$ を考えることで矛盾を導け.

(2) 逆に Ω が連結開集合だと仮定し, $w \in \Omega$ を固定する. 部分集合 $\Omega_1 \subset \Omega$ を

$$\Omega_1 := \{z \in \Omega \mid w \text{ を始点とし } z \text{ を終点とする区分的に滑らかな } \Omega \text{ 内の曲線が存在する }\}$$

で定め, また $\Omega_2 := \Omega \setminus \Omega_1$ と定める. このとき Ω_1 と Ω_2 はともに開集合であることを示せ. また $\Omega_1 \neq \emptyset$ を示せ. すると $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ と $\Omega_1 \cup \Omega_2 = \Omega$ および連結性の仮定から $\Omega = \Omega_1$ が従う.

問題 2.2. $\Omega \subset \mathbb{C}$ を空でない[*3]開集合とし, $z \in \Omega$ とする. $z \in \Omega$ を含む Ω の**連結成分** C_z を次で定める.

$$C_z := \{w \in \Omega \mid z \text{ から } w \text{ へ区分的に滑らかな } \Omega \text{ 上の曲線で結べる }\}.$$

(1) C_z が連結開集合であることを示せ. C_z は $z \in \Omega$ を含む Ω の**連結成分** (connected component) と呼ばれる.

(2) $w \in C_z$ は Ω 上の同値関係を与えること, つまり任意の $u, w, z \in \Omega$ に対し次の三条件が成立することを示せ.
(i) $z \in C_z$.　(ii) $w \in C_z$ ならば $z \in C_w$.　(iii) $w \in C_z$ かつ $z \in C_u$ ならば $w \in C_u$.
これから Ω は互いに交わらない連結成分の和 $\Omega = \sqcup_{i \in I} C_{z_i}$ であることが分かる.

注意. レポート問題 2.1 より, $\mathbb{C}$ の開集合の連結成分は高々可算個であることが分かる.

2.2　複素積分

$r \in \mathbb{R}_{>0}$ とする. $z_0 \in \mathbb{C}$ を中心とする半径 r の, **正の向き付けを持つ円**とは, パラメータ付き曲線 $z : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $z(t) := z_0 + re^{it}$ の同値類のことをいう.

[*1] 2019/10/10, ver. 0.2.
[*2] ver. 0.2 で訂正しました.
[*3] ver. 0.2 で訂正しました.

問題 2.3. (1) 原点を中心とする半径 r の, 正の向き付けを持つ円 C を考える. 各 $n \in \mathbb{Z}$ に対して次の複素積分を計算せよ.

$$\int_C z^n \, dz.$$

(2) $2r$ を中心とする半径 r の, 正の向き付けを持つ円 C に対して, (1) と同じ複素積分を計算せよ.

(3) $|a| < r < |b|$ と仮定し, C を原点を中心とする半径 r の, 正の向き付けを持つ円とする. 次の等式を示せ.

$$\int_C \frac{1}{(z-a)(z-b)} \, dz = \frac{2\pi i}{a-b}.$$

問題 2.4. 次の積分の値を求めよ.

(1) $\int_0^i z/(z+1)\, dz$. 積分路は直線とする.

(2) $\int_C |z| \, dz$. C は原点中心で正の向きの単位円のうちの上半分.

問題 2.5. 連結開集合 Ω 上の連続関数 $f(z)$ の二つの原始関数 $F_1(z)$ と $F_2(z)$ について, $F_1(z) - F_2(z)$ は定数関数であることを示せ.

2.3 その他の問題

問題 2.6. 次の複素数を $x + iy$ の形に表せ.

(1) $\log i$. (2) i^i.

問題 2.7. 次の等式を満たす複素数 z を全て求めよ.

(1) $\cosh z = 0$. (2) $\log z = 2 + \pi i/6$.

問題 2.8. 以下の複素数列 $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ に対して, 級数 $\sum_{n=1}^\infty a_n z^n$ の収束半径を求めよ.

(1) $a_n = (\log n)^2$. (2) $a_n = n!$. (3) $a_n = \dfrac{n^2}{4^n + 3n}$.

問題 2.9. $\mathbb{R}$ 上の関数 $f(x)$ を次のように定める.

$$f(x) := \begin{cases} 0 & (x \leq 0) \\ \exp(-1/x^2) & (x > 0) \end{cases}.$$

(1) $f(x)$ が $\mathbb{R}$ 上で無限回微分可能であることを示せ.

(2) 任意の $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して $f^{(n)}(0) = 0$ となることを示せ.

(3) $f(x)$ は $x = 0$ の近傍で収束級数 $\sum_{n=0}^\infty a_n x^n$ に展開できないことを示せ.

レポート問題

レポート問題 2.1. 問題 2.2 において, (2) の I は高々可算無限濃度の集合であること, つまり Ω の異なる連結成分の数は高々可算個であることを示せ.

以上です.