現代数学基礎 CⅢ　10 月 10 日分演習解答[*1]

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp
https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida/2019WC3.html

2　復習 2: 複素積分

2.1　複素平面内の曲線

問題 2.1.　(1) $z(t^*) \in \Omega_1$ と仮定する．z は連続写像で Ω_1 は開集合なので, 十分小さい正の実数 ε があって $z(t^* + \varepsilon) \in \Omega_1$．一方 sup の定義から, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $z(t^* + \varepsilon) \notin \Omega_1$．よって矛盾する．
次に $z(t^*) \in \Omega_2$ と仮定する．z は連続写像で Ω_2 は開集合なので, 十分小さい正の実数 ε があって $z(t^* - \varepsilon) \in \Omega_2$．一方 sup の定義から, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $z(t^* - \varepsilon) \in \Omega_1$．よって矛盾する．

(2) 任意の $z \in \Omega_1$ に対して, Ω が開集合であることから $D_r(z) \subset \Omega$ となる $r \in \mathbb{R}_{>0}$ が存在する．$D_r(z)$ の任意の点は z と直線で結べるから, $D_r(z) \subset \Omega_1$．よって Ω_1 は開集合．また $w \in \Omega_1$ より $\Omega_1 \neq \emptyset$.
次に任意の $z \in \Omega_2$ に対して, Ω が開集合であることから $D_r(z) \subset \Omega$ となる $r \in \mathbb{R}_{>0}$ が存在する．$D_r(z)$ の任意の点は z と直線で結べるから, $D_r(z) \subset \Omega_2$．よって Ω_2 は開集合.

問題 2.2.　(1) 問題 2.1 (2) と同様に C_z は開集合だと分かり, 問題 2.1 (1) と同じ議論で連結性が出る．

(2) $z \in C_z$ について[*2]. Ω は開集合なので $D_r(z) \subset \Omega$ となる正の実数 r が存在する．パラメータ付き曲線 $p(t) := z - r/3 + re^{it}/3$ $(t \in [0, 2\pi])$ の定める曲線を c とすれば, c の始点と終点は z なので, $z \in C_z$.
$w \in C_z$ なら, 始点 z, 終点 w の曲線 c があるが, その逆向きの曲線 c^- により $z \in C_w$ が分かる．$w \in C_z$ かつ $z \in C_u$ ならば, 始点 z, 終点 w の曲線 c_1 と始点 u, 終点 z の曲線 c_2 があるが, それらを結んで u を始点とし w を終点とする曲線が作れるので $w \in C_u$.

2.2　複素積分

問題 2.3.　(1) $z(t) = re^{it}$ と C をパラメータ付けると

$$\int_C z^n \, dz \;=\; \int_0^{2\pi} r^n e^{int} \cdot ire^{it} \, dt \;=\; ir^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t} \, dt \;=\; \begin{cases} 0 & (n \neq -1) \\ 2\pi i & (n = -1) \end{cases}.$$

(2) $z(t) = 2r + re^{it}$ と C をパラメータ付けると

$$\int_C z^n \, dz \;=\; \int_0^{2\pi} r^n (e^{it}+2)^n \cdot ire^{it} \, dt \;=\; r^{n+1} \int_0^{2\pi} ie^{it}(e^{it}+2)^n \, dt \;=\; \frac{r^{n+1}}{n+1} \left[(e^{it}+2)^{n+1}\right]_0^{2\pi} \;=\; 0.$$

(3) $z(t) = re^{it}$ と C をパラメータ付けると

$$\begin{aligned} \int_C \frac{1}{(z-a)(z-b)} \, dz \;&=\; \int_0^{2\pi} \frac{1}{(re^{it}-a)(re^{it}-b)} \cdot ire^{it} \, dt \;=\; \frac{1}{a-b} \int_0^{2\pi} \left(\frac{ire^{it}}{re^{it}-a} - \frac{ire^{it}}{re^{it}-b} \right) dt \\ &=\; \frac{1}{a-b} \left(\left[\log(re^{it}-a)\right]_0^{2\pi} - \left[\log(re^{it}-b)\right]_0^{2\pi} \right) \;=\; \frac{1}{a-b}(2\pi i - 0) = \frac{2\pi i}{a-b}. \end{aligned}$$

[*1] 2019/10/24, ver. 0.3.
[*2] ver. 0.2 で訂正しました.

最後から二番目の等号について補足すると, $|a| < r$ より $re^{it} - a$ の偏角が $t : 0 \to 2\pi$ で 2π 増えることから $\left[\log(re^{it} - a)\right]_0^{2\pi} = 2\pi$. また $r < |b|$ より $re^{it} - b$ の偏角は変わらないことから $\left[\log(re^{it} - b)\right]_0^{2\pi} = 2\pi$.

問題 2.4. (1) [*3] 直線 $[0, i]$ 上では $1/(z+1)$ が (分岐を指定した) log を原始関数を持つことに注意して

$$\begin{aligned}\int_0^i \frac{z}{z+1} dz &= \int_0^i \left(1 - (z+1)^{-1}\right) dz = [z - \log(z+1)]_0^i \\ &= i - (\log(i+1) - \log 1) = i - \left(\log(\sqrt{2}e^{i\pi/4}) - \log 1\right) \\ &= i - \left(\log\sqrt{2} + i(\pi/4 + 2n\pi) - 2n\pi i\right) = -(\log 2)/2 + i(1 - \pi/4).\end{aligned}$$

三行目で log の分岐を取るときに同じ n を用いることに注意する.

(2) $z = e^{i\theta}$ と C をパラメータ付けすると

$$\int_C |z|\, dz = \int_0^\pi 1 \cdot ie^{i\theta}\, d\theta = \left[e^{i\theta}\right]_0^\pi = e^{i\pi} - 1 = -2.$$

問題 2.5. $F_1'(z) = F_2'(z) = f(z)$ より $(F_1 - F_2)' = 0$. したがって系 2.2.4 から $F_1 - F_2$ は定数関数.

2.3 その他の問題

問題 2.6. (1) $\log i = \log(1 \cdot e^{i\pi/2}) = \log 1 + i(\pi/2 + 2n\pi) = (1/2 + 2n)\pi i$ $(n \in \mathbb{Z})$.

(2) $i^i = e^{i\log i} = e^{i(1/2+2n)\pi i} = e^{-(1/2+2n)\pi}$ $(n \in \mathbb{Z})$.

問題 2.7. (1) $\cosh z = (e^z + e^{-z})/2 = 0$ より $e^{2z} = -1 = 1 \cdot e^{(2n+1)\pi i}$ $(n \in \mathbb{Z})$. よって $z = (2n+1)\pi i/2 = (1/2 + n)\pi i$ $(n \in \mathbb{Z})$.

(2) $z = re^{i\theta}$ とおくと $\log z = \log r + i(\theta + 2n\pi)$ $(n \in \mathbb{Z})$. よって $\log r = 2$, $\theta + 2n\pi = \pi/6$. 従って $z = e^2 e^{(\pi/6 - 2n\pi)i} = e^2(\sqrt{3} + i)/2$.

問題 2.8. (1) $|a_{n+1}/a_n| = (1 + \log(1 + 1/n)/\log n)^2 \to 1$ より収束半径は 1.

(2) $|a_{n+1}/a_n| = n + 1 \to \infty$ より収束半径は 0.

(3) $|a_{n+1}/a_n| = 4^{-1}(1 + 1/n)^2(1 + 3n/4^n)/(1 + 3(n + 1/4^{n+1}) \to 1/4$ より収束半径は 4 [*4].

問題 2.9. (1) $x > 0$ で $f^{(n)}(x) = x^{-3n} d_n(x) \exp(-1/x^2)$, 但し $d_n(x)$ は x の $2(n-1)$ 次多項式, と書けることが n に関する帰納法で示せる. $y = 1/x$ として, 十分大きい y に対して $exp(y^2) > y^{4n}/(2n)!$ となるので $\lim_{y \to +\infty} y^{2n} \exp(-y^2) = 0$. つまり $\lim_{x \to +0} f^{(n)}(x) = 0$. $x < 0$ では $f^{(0)}(x) = 0$ だから, これで無限回微分可能であることが示せた.

(2) 既に示した.

(3) もし $f(x) = \sum_{n=0}^\infty a_n x^n$ と級数展開できるなら, 収束数列の微分と級数和は交換できるから $f^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^\infty n \cdot (n - k + 1) a_n x^{n-k}$ となり, $f^{(k)}(0) = 0$ より任意の $n \geq 1$ で $a_n = 0$ となる. つまり $f(x)$ は $x = 0$ の近傍で恒等的に 0 になり, f の定義と矛盾する.

以上です.

[*3] ver. 0.2 で加筆, 修正しました.
[*4] ver. 0.3 で訂正しました.