現代数学基礎 CⅢ　10 月 10 日分講義ノート[*1]

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp
https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida/2019WC3.html

2　復習 2: 複素積分

前回と同様に, 実数全体の集合を $\mathbb{R}$, 複素数全体の集合を $\mathbb{C}$ と書く. $\mathbb{R}_{>0}$ は正の実数のなす集合を意味する. 今回の内容は [SS, Chapter 1 §3] に基づく.

2.1　複素平面内の曲線

教科書 [今吉, §4.1.1] や前期の講義ノート [吉田, §5.1] も参照のこと.
複素積分の復習のため, まず積分路の扱い方から思い出そう.

定義 2.1.1. (1) (複素平面 $\mathbb{C}$ 上の) **パラメータ付き曲線** (parametrized curve) とは閉区間 $[a,b] \subset \mathbb{R}$ から $\mathbb{C}$ への連続写像 p のことである.

(2) パラメータ付き曲線 $p:[a,b] \to \mathbb{C}$ が**滑らか** (smooth) であるとは, $[a,b]$ 上で $p(t)$ が連続微分可能であり, 更に任意の $t \in [a,b]$ に対して $p'(t) \neq 0$ となるもののことである. 但し端点 $t=a,b$ での微分は片側微分の意味とする:

$$p'(a) := \lim_{h\to+0} \frac{p(a+h)-p(a)}{h}, \quad p'(b) := \lim_{h\to-0} \frac{p(b+h)-p(b)}{h}.$$

(3) **区分的に滑らかな** (piecewise-smooth) パラメータ付き曲線 $p:[a,b] \to \mathbb{C}$ とは, 連続写像であって, 区間 $[a,b]$ の有限個の分割

$$a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$$

が存在して, 各区間 $[a_k, a_{k+1}]$ 上で $p(t)$ が滑らかなパラメータ付き曲線であることをいう.

集合 S 上の二項関係 $\sim$ が**同値関係** (equivalence relation) であるとは, 任意の $x,y,z \in S$ に対し次の三条件が成立することを言った.

(i) $x \sim x$.　(ii) $x \sim y$ ならば $y \sim x$.　(iii) $x \sim y$ かつ $y \sim z$ ならば $x \sim z$.

同値関係 $\sim$ と $x \in S$ に対し $\overline{x} := \{y \in S \mid y \sim x\}$ を x の**同値類** (equivalence class) と呼んだ. 同値類全体のなす集合を $S/\sim$ と書いて, 同値関係 $\sim$ による S の**商集合** (quotient set) と呼んだ.

定義. (1) 二つのパラメータ付き曲線 $p:[a,b] \to \mathbb{C}$ と $q:[c,d] \to \mathbb{C}$ が**同値**であるとは, ある連続微分可能な全単射 $\varphi:[c,d] \to [a,b]$ が存在して, 任意の $s \in [c,d]$ に対して $\varphi'(s) > 0$ かつ $q(s) = p(\varphi(s))$ となることをいう. これでパラメータ付き曲線のなす集合に同値関係が定まる.

(2) **曲線** (curve) とは, パラメータ付き曲線のなす集合において (1) で定めた同値関係による同値類のことをいう. また**滑らかな曲線** (smooth curve) とは, 滑らかなパラメータ付き曲線のなす集合において (1) で定めた同値関係による同値類のことをいう. **区分的に滑らかな曲線** (piece-wise smooth curve) も同様に定義する.

[*1] 2019/10/09, ver. 0.2.

$\Omega \subset \mathbb{C}$ を部分集合とする. **Ω 上の曲線**とは, その像が Ω に含まれるようなパラメータ付き曲線の同値類のこと, つまり $p : [a, b] \to \Omega$ の同値類のことである. **Ω 上の滑らかな曲線**. **Ω 上の区分的に滑らかな曲線**. も同様に定義できる. また曲線の**始点**と**終点**が自然に定義できる.

以下では簡単のため, 曲線を記号 C で表し, またその代表元であるパラメータ付き曲線を **C のパラメータ付け**または**パラメータ表示**と呼ぶ.

定義. 曲線 C に対し, そのパラメータ付け $p : [a, b] \to \mathbb{C}$ をとり,

$$p^{-}(t) := p(a + b - t)$$

で定まるパラメータ付き曲線 $p^{-} : [a, b] \to \mathbb{C}$ の同値類を C の**逆向きの曲線**と呼び, C^{-} と表す.

逆向きの曲線という概念が well-defined であること, つまりパラメータ付け p に依存しないことに注意する.

定義. (1) 区分的に滑らかな曲線が**閉曲線** (closed curve) であるとは, そのパラメータ付けを $p : [a, b] \to \mathbb{C}$ として, $p(a) = p(b)$ となることをいう.

(2) 区分的に滑らかな曲線が**単純曲線** (simple curve) であるとは, そのパラメータ付けを $p : [a, b] \to \mathbb{C}$ として, $s, t \in (a, b)$ かつ $s \neq t$ ならば $p(s) \neq p(t)$ となることをいう.

閉曲線や単純曲線はパラメータの取り方に依存しない概念であることに注意する.

定義. 滑らかな曲線 C の**長さ** $\ell(C) \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ を, パラメータ付け $p : [a, b] \to \mathbb{C}$ を一つとって次式で定義する.

$$\ell(C) := \int_a^b |p'(t)|\, dt.$$

但し右辺は Riemann 積分の意味とする.

区分的に滑らかな曲線 C に対しては, パラメータ付け $p : [a, b] \to \mathbb{C}$ を一つとり, 各区間 $[a_k, a_{k+1}]$ で滑らかになるような分割 $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$ をとって, 各区間での滑らかな曲線としての長さの和を C の長さと定義する.

曲線の長さはパラメータの取り方によらないことに注意する. 実際, 滑らかな場合なら, $q : [c, d] \to \mathbb{C}$ を別のパラメータ付けとして

$$\int_c^d |q'(s)|\, ds = \int_c^d |p'(t(s))t'(s)|\, ds = \int_c^d |p'(t(s))|\, t'(s)\, ds = \int_a^b |p'(t)|\, dt.$$

区分的に滑らかな曲線の場合は分割すれば滑らかな曲線の場合に帰着される.

後の系 2.2.4 の証明に用いる次の定理を思い出しておく.

定理 2.1.2. 部分集合 $S \subset \mathbb{C}$ が**弧状連結** (path-wise connected) であるとは, S の任意の二点について, それらを始点と終点とするような S 上の区分的に滑らかな曲線が存在することをいう. このとき, 空でない開集合 $\Omega \subset \mathbb{C}$ が弧状連結であることと連結 (§1.1 参照) であることは同値.

2.2 複素積分

教科書 [今吉, §4.2.2] や前期の講義ノート [吉田, §5.2] も参照のこと.

§2.1 の準備の下, 複素積分の定義を思い出そう. 以下で**曲線 C 上の関数 f** といったら, C のパラメータ表示 $p : [a, b] \to \mathbb{C}$ の像 $p([a, b])$ を含むある開集合 $U \subset \mathbb{C}$ 上で定義された関数 $f : U \to \mathbb{C}$ のことをいう.

定義. C を滑らかな曲線とし, f を C 上で連続な関数とする. **f の C 上での (線) 積分** $\int_C f(z)\,dz$ を, C のパラメータ付け $p:[a,b]\to\mathbb{C}$ を一つとって

$$\int_C f(z)\,dz := \int_a^b f(p(t))p'(t)\,dt$$

と定義する. 但し右辺は Riemann 積分の意味とする.

区分的に滑らかな曲線 C に対しては, 各区間で C が滑らかになるように $[a,b]$ を分割し, 各区間での積分の和として $\int_C f(z)dz$ を定義する.

複素積分は曲線のパラメータによらずに定まる. 実際, C が滑らかな場合は, $q:[c,d]\to\mathbb{C}$ を別のパラメータ付けとして, $\varphi:[c,d]\to[a,b]$ が同値関係 $p\sim q$ を与えるとすると

$$\int_c^d f(q(s))q'(s)\,ds = \int_c^d f(p(\varphi(s)))p'(\varphi(s))\varphi'(s)\,ds = \int_a^b f(t)p'(t)\,dt.$$

命題 2.2.1 ([今吉, 定理 4.2])**.** 区分的に滑らかな曲線 $C\subset\mathbb{C}$ とその上の連続関数 f,g に対して

(1) $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$ なら

$$\int_C (\alpha f(z)+\beta g(z))\,dz = \alpha\int_C f(z)dz + \beta\int_C g(z)\,dz.$$

(2) C^- を C の逆向きの曲線とすると

$$\int_C f(z)\,dz = -\int_{C^-} f(z)\,dz.$$

(3)

$$\left|\int_C f(z)\,dz\right| \le \sup_{z\in C}|f(z)|\cdot\ell(C).$$

証明. (1) は Riemann 積分の線形性から従う. (2) は逆向きの曲線の定義から従う. (3) は, やはり Riemann 積分の性質から, $p:[a,b]\to\mathbb{C}$ を C のパラメータ付けとして

$$\begin{aligned}\left|\int_C f(z)\,dz\right| = \left|\int_a^b f(p(t))p'(t)\,dt\right| &\le \int_a^b |f(p(t))p'(t)|\,dt\\ &\le \sup_{t\in[a,b]}|f(p(t))|\cdot\int_a^b |p'(t)|\,dt = \sup_{z\in C}|f(z)|\cdot\ell(C).\end{aligned}$$

□

次に原始関数の概念を思い出そう: 開集合 $\Omega\subset\mathbb{C}$ 上の関数 f の**原始関数** (primitive) とは, Ω 上の正則関数 F であって任意の $z\in\Omega$ に対して $F'(z)=f(z)$ となるもののことをいう.

定理 2.2.2. f を開集合 $\Omega\subset\mathbb{C}$ 上の連続関数とし, F を f の原始関数とする. また C を Ω 上の区分的に滑らかな曲線であって, 始点が w_0, 終点が w_1 であるものとする. このとき

$$\int_C f(z)\,dz = F(w_1)-F(w_0).$$

特に左辺の複素積分は始点と終点のみに依存する.

証明. まず C が滑らかな場合, $p:[a,b]\to\mathbb{C}$ を C のパラメータ付けとして,

$$\int_C f(z)\,dz = \int_a^b f(p(t))p'(t)\,dt = \int_a^b F'(p(t))p'(t)\,dt = \int_a^b \frac{d}{dt}F(p(t))\,dt$$

$$= F(p(b)) - f(p(a)) = F(w_1) - F(w_0).$$

C が区分的に滑らかな場合は, $p : [a,b] \to \mathbb{C}$, $a = a_0 < \cdots < a_n = b$ を定義 2.1.1 (2) のような C のパラメータ付けとして, 滑らかな場合の結果から

$$\begin{aligned}\int_C f(z)\,dz &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(p(t))p'(t)\,dt = \sum_{k=0}^{n-1} \bigl(F(p(a_{k+1})) - F(p(a_k))\bigr) \\ &= F(p(a_n)) - F(p(a_0)) = F(w_1) - F(w_0).\end{aligned}$$

□

特に C が閉曲線の場合は

系 2.2.3. C を開集合 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 上の閉曲線とし, f を Ω 上の連続関数であって原始関数を持つものとすると

$$\int_C f(z)\,dz = 0.$$

連結開集合を領域と呼ぶ (§1.1) ことを思い出しておこう.

系 2.2.4. f を領域 Ω 上の正則関数であって任意の $z \in \Omega$ に対して $f'(z) = 0$ となるものとする. このとき f は定数関数である.

証明. $w_0 \in \Omega$ を固定しておく. 任意の $w \in \Omega$ に対して $f(w) = f(w_0)$ を示せばよい. Ω は連結なので, 定理 2.1.2 より始点を w_0 とし終点を w とする Ω 上の曲線 C が存在する. f は f' の原始関数なので, 定理 2.2.2 から

$$\int_C f'(z)\,dz = f(w) - f(w_0).$$

仮定より $f'(z) = 0$ なので左辺は 0. よって示せた. □

参考文献

[今吉] 今吉洋一, **複素関数概説**, サイエンス社 (1997).

[SS] E. M. Stein, R. Shakarchi, *Complex Analysis*, Princeton lectures in Analysis II, Princeton University Press (2003);
日本語訳: エリアス・M. スタイン, ラミ・シャカルチ著, 新井仁之, 杉本充, 高木啓行, 千原浩之訳, **プリンストン解析学講義 II 複素解析**, 日本評論社 (2009).

[吉田] 吉田伸夫, **複素関数論**, 前期講義「複素関数論」の講義ノート (2019).

以上です.