現代数学基礎 CⅢ　10 月 03 日分演習解答[*1]

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp
https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida/2019WC3.html

1　復習: 複素微分と初等関数

1.1　複素平面内の集合

問題 1.1. 開集合でも閉集合でもない.

まず開集合でないことについて. $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \subset \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}$ の任意の点, つまり任意の無理数 $x \in \mathbb{R}$ を取ると, 任意の $r \in \mathbb{R}_{>0}$ について開円板 $D_r(x) \subset \mathbb{C}$ は有理数を含む. 実際, 有理数の稠密性から開区間 $(x, x+r) \subset \mathbb{R}$ はある有理数 q を含むから, $q \in D_r(x)$ となる. つまり $D_r(x) \not\subset \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}$ であり, 定義より $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}$ は開集合ではない.

次に閉集合でないことについて. $(\mathbb{C} \setminus \mathbb{Q})^c = \mathbb{Q} \subset \mathbb{C}$ が開集合でないことを言えばよい. 任意の $q \in \mathbb{Q}$ と任意の $r \in \mathbb{R}_{>0}$ について, $q + ir/2 \in D_r(q) \cap (\mathbb{C} \setminus \mathbb{R})$ より $D_r(q) \not\subset \mathbb{Q}$ だから, $\mathbb{Q}$ は開集合ではない.

1.2　複素微分

問題 1.2.　(1) $z = re^{i\theta}$ とおくと $(z+\overline{z})/|r| = 2\cos\theta$. $z \to 0$ とすると θ によって異なる値に近づくから極限は存在せず, 従って $f(z)$ は $z = 0$ で不連続.

(2) $z = re^{i\theta}$ とおくと $(z+\overline{z})^2/|r| = 4r\cos^2\theta$. $z \to 0$ とすると $f(z) \to 0$. 従って $f(z)$ は $z = 0$ で連続.

1.3　Cauchy-Riemann 方程式

問題 1.3.　(1) $u_r := \partial u/\partial r$ 等と略記する. $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ と微分の連鎖律から

$$u_r = u_x x_r + u_y y_r = u_x \cos\theta + u_y \sin\theta, \quad u_\theta = u_x x_\theta + u_y y_\theta = -u_x r\sin\theta + u_y r\cos\theta,$$
$$v_r = v_x x_r + v_y y_r = v_x \cos\theta + v_y \sin\theta, \quad v_\theta = v_x x_\theta + v_y y_\theta = -v_x r\sin\theta + v_y r\cos\theta.$$

ここで Cauchy-Riemann 方程式 $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ と第 1 式及び第 4 式から $v_\theta = ru_r$. 同様に第 2 式及び第 3 式から $u_\theta = -rv_r$. よって結論を得る.

(2) $u = R\cos\varphi$, $v = R\sin\varphi$ と $u_x = v_y$ から $R_x\cos\varphi - R\varphi_x\sin\varphi = R_y\sin\varphi + R\varphi_y\cos\varphi$　　(a)

同様に $u_y = -v_x$ から $R_y\cos\varphi - R\varphi_y\sin\varphi = -R_x\sin\varphi - R\varphi_x\cos\varphi$　　(b)

(a) $\times \cos\varphi +$ (b) $\times \sin\varphi$ から $R_x = R\varphi_y$ を, (a) $\times \sin\varphi -$ (b) $\times \cos\varphi$ から $R_y = -R\varphi_x$ を得る.

(3) $u = R\cos\varphi$, $v = R\sin\varphi$ と微分の連鎖律から $u_r = R_r\cos\varphi - \varphi_r R\sin\varphi$, $u_\theta = R_\theta\cos\varphi - \varphi_\theta R\sin\varphi$, $v_r = R_r\sin\varphi + \varphi_r R\cos\varphi$, $v_\theta = R_\theta\sin\varphi + \varphi_\theta R\cos\varphi$. これらを (1) の結論に代入すると

$$R_r\cos\varphi - R\varphi_r\sin\varphi = R_\theta r^{-1}\sin\varphi + R/r \cdot \varphi_\theta\cos\varphi \qquad \text{(c)}$$
$$-R_r\sin\varphi + R\varphi_r\cos\varphi = R_\theta r^{-1}\cos\varphi - R/r \cdot \varphi_\theta\sin\varphi \qquad \text{(d)}$$

(c) $\times \cos\varphi +$ (d) $\times \sin\varphi$ から $R_r = \varphi_\theta R/r$ を, (c) $\times \sin\varphi -$ (d) $\times \cos\varphi$ から $R_\theta/r = -R\varphi_r$ を得る.

1.4　冪級数と正則関数

問題 1.4. [*2]

[*1] 2019/10/10, ver. 0.2.
[*2] ver. 0.2 で修正しました.

(1) $b_n := (n!)^{1/n}$ が単調増加かつ上に有界ではないことを示せば十分. 実際, それから $\lim_{n\to\infty} b_n^{-1} = 0$ が従うので, $\overline{\lim}_{n\to\infty} b_n^{-1} = \lim_{n\to\infty} b_n^{-1} = 0$ を得る.
まず単調増加について. 各 $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して $b_{n+1}^{n(n+1)} - b_n^{n(n+1)} > 0$ を示せばよいが,

$$b_{n+1}^{n(n+1)} - b_n^{n(n+1)} \;=\; ((n+1)!)^n - (n!)^{n+1} \;=\; (n!)^n\left((n+1)^n - n!\right)$$

と $(n+1)^n > n^n \geq n!$ より従う.
次に有界ではないことについて. b_n が有界だと仮定すると, ある $M \in \mathbb{R}_{>0}$ が存在して任意の $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し $M > b_n$, つまり $M^n > n!$. 両辺の対数を取って $n\log M > \sum_{k=1}^n \log k$. ここで実数 x の関数 $\log x$ が上に凸な単調増加関数であることから $\sum_{k=1}^n \log k > \int_1^n \log x\,dx$ となることに注意すると

$$n\log M \;>\; \sum_{k=1}^{n} \log k \;>\; \int_1^n \log x\,dx \;=\; n\log n - (n-1).$$

従って任意の $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して $n + n\log M > n - 1 + n\log M > n\log n$, つまり $(eM)^n > n^n$. しかし, ここで $n_1 := \lceil eM \rceil$ (eM 以上の最小の整数) と定めると $n_1^{n_1} \geq (eM)^{n_1}$ となって矛盾する.

(2) (1) の b_n を使うと, $a_{2n}^{1/2n} = b_{2n}^{-1}$ より $\{b_{2m}^{-1}\}_{m\geq n} = \{a_{2m}^{1/2m}\}_{m\geq n} \subset \{a_m^{1/m}\}_{m\geq n}$ が得られる. すると $0 \leq \overline{\lim}_{n\to\infty} a_n^{1/n} \leq \overline{\lim}_{n\to\infty} a_{2n}^{1/2n} = \overline{\lim}_{n\to\infty} b_{2n}^{-1}$. 一方 (1) より $\lim_{n\to\infty} b_{2n}^{-1} = 0$ なので $\overline{\lim}_{n\to\infty} b_{2n}^{-1} = \lim_{n\to\infty} b_{2n}^{-1} = 0$. よって $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n = 0$.

1.5 初等関数

問題 1.5. $f(z) := (1+z)^\alpha = \exp(\alpha\,\mathrm{Log}(1+z))$ を微分すると, $(\mathrm{Log}\,z)' = 1/z$ から $f'(z) = \alpha(1+z)^{-1}f(z)$.
一方 $g(z) := \sum_{n=0}^\infty \binom{\alpha}{n} z^n$ の収束半径は $\lim_{n\to\infty}\left|\binom{\alpha}{n}/\binom{\alpha}{n+1}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{\alpha-n}\right| = 1$. よって $|z| < 1$ では $g'(z) = \sum_{n=0}^\infty n\binom{\alpha}{n} z^{n-1}$. ここで二項係数の定義から

$$n\tbinom{\alpha}{n} + (n+1)\tbinom{\alpha}{n+1} \;=\; \alpha\tbinom{\alpha}{n}$$

となることを用いると $(1+z)g'(z) = \alpha g(z)$ が示せる.
すると $(g(z)/f(z))' = 0$ が示せて, $g(z)/f(z) = g(0)/f(0) = 1$. よって $|z| < 1$ なら $g(z) = f(z)$.

問題 1.6. 正弦関数の逆関数が存在すると仮定して g と書く. $z = \sin w$ として, $|z| < 1$ の場合, g の z での微分は $g'(z) = 1/(\sin w)' = 1/\cos w = 1/\sqrt{1-z^2}$. すると二項定理 (問題 1.5) から

$$g'(z) = (1-z^2)^{-1/2} = \textstyle\sum_{n=0}^\infty \binom{-1/2}{n}(-z^2)^n = \sum_{n=0}^\infty \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} z^{2n}.$$

一方, 幂級数 $\mathrm{Arcsin}\,z$ の収束半径は ratio test により 1 で, 収束円板内で $(\mathrm{Arcsin}\,z)' = \sum_{n=0}^\infty \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} z^{2n}$.
よって $(\mathrm{Arcsin}\,z - g(z))' = 0$ なので $\mathrm{Arcsin}\,z - g(z) = \mathrm{Arcsin}\,0 - g(0) = 0$, つまり $\mathrm{Arcsin}\,z$ は逆関数.
$\mathrm{Arccos}\,z$ については, 加法定理と既に得た結果から $\cos(\mathrm{Arccos}\,z) = \cos(\pi/2 - \mathrm{Arcsin}\,z) = \sin\pi/2 \cdot \sin(\mathrm{Arcsin}\,z) = z$ となって, 確かに $\cos z$ の逆関数である.

問題 1.7. 問題 1.6 と同様の方針をとる. $\tan z$ の逆関数 $g(z)$ が存在すると仮定すれば $g'(z) = 1/(\tan w)' = 1/(1+\tan^2 w) = 1/(1+z^2) = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n z^{2n}$. 一方で幂級数 $\mathrm{Arctan}\,z$ の収束半径は ratio test から 1 だと分かり, 収束円板内で $(\mathrm{Arctan}\,z)' = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n z^{2n}$. よって $\mathrm{Arctan}\,z - g(z) = \mathrm{Arctan}\,0 - g(0) = 0$ となる.

以上です.