

現代数学基礎 CIII 10 月 03 日分講義ノート^{*1}

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)

yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp

<https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida/2019WC3.html>

1 復習: 複素微分と初等関数

整数全体の集合を \mathbb{Z} , 有理数全体の集合を \mathbb{Q} , 実数全体の集合を \mathbb{R} , 複素数全体の集合を \mathbb{C} と書く. $\mathbb{R}_{>0}$ は正の実数のなす集合を意味する.

今回の内容は参考書 [SS, 1 章] に基づく.

1.1 複素平面内の集合

教科書 [今吉, §4.1.2] も参照のこと.

$z \in \mathbb{C}$ と $r \in \mathbb{R}_{>0}$ に対し,

$$D_r(z) := \{w \in \mathbb{C} \mid |w - z| < r\}$$

を半径 r , 中心 z の開円板 (open disk) と呼ぶ.

$S \subset \mathbb{C}$ とする. $z \in \mathbb{C}$ が S の内点 (interior point) であるとは, $D_r(z) \subset S$ となる $r \in \mathbb{R}_{>0}$ が存在することをいう. S の内点からなる集合を

$$S^\circ := \{z \in \mathbb{C} \mid z \text{ は } S \text{ の内点}\}$$

と書いて S の内部 (interior) と呼ぶ. いつも $S^\circ \subset S$ となることに注意する.

$S \subset \mathbb{C}$ が開集合 (open set) であるとは $S^\circ = S$ となることをいう. 例えば開円板 $D_z(r)$ は開集合である.

$S \subset \mathbb{C}$ が閉集合 (closed set) であるとは $S^c := \mathbb{C} \setminus S$ が開集合であることをいう. 例えば $\overline{D_r(z)} := \{w \in \mathbb{C} \mid |w - z| \leq r\}$ は閉集合である. また \mathbb{C} 全体や \emptyset (空集合) は開集合でありかつ閉集合である.

開集合 $S \subset \mathbb{C}$ が連結 (connected) であるとは, 空でない開集合 U と V で以下の二条件を満たすものは存在しないことをいう.

$$S = U \cup V, \quad U \cap V = \emptyset.$$

連結開集合を領域 (region) と呼ぶこともある.

1.2 複素微分

教科書 [今吉, §3.2.1] や前期の講義ノート [吉田, §4.1] も参照のこと.

以下簡単のため, 複素数値関数のことを関数と呼ぶ. また開集合または閉集合といったら §1.1 の意味での \mathbb{C} の開集合または閉集合のことを意味するものとする.

開集合 U 上の関数 f が $z_0 \in U$ で正則 (holomorphic) であるとは, 商

$$\frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} \tag{1.1}$$

^{*1} 2019/10/10, ver. 0.4.

の $h \rightarrow 0$ における極限が存在することをいう。正則であるときは

$$f'(z_0) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

と書き, f の z_0 における (複素または正則) 微分 (derivative) という。

注意. (1.1) の h は, 商が定義されるために $h \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ かつ $h + z_0 \in U$ となるものを取っている。また, $h \rightarrow 0$ の極限をとる時に h は任意の方向から 0 に近づくものとして考えている。

関数 f が開集合 U 上で正則であるとは, U の各点で f が (定義されていてかつ) 正則であることをいう。 f が閉集合 C 上で正則であるとは, C を含む開集合が存在して, その上で正則であることをいう。 f が \mathbb{C} 上で正則なとき, f を **整関数** (entire function) と呼ぶ。

例 1.2.1. (1) 関数 $f(z) = z$ は \mathbb{C} の任意の開集合で正則, 特に整関数であり, $f'(z) = 1$ である。任意の多項式 $f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ も整関数であり, $f'(z) = n a_n z^{n-1} + \cdots + a_1$ となる。後者は後の命題 1.2.2 から得られる。

(2) $f(z) = 1/z$ は原点を含まない任意の開集合上で正則であり, $f'(z) = -1/z^2$ 。

(3) 関数 $f(z) = \bar{z}$ は正則ではない。

命題 1.2.2 ([今吉, 定理 3.4 複素微分法の公式]). f と g を開集合 $U \subset \mathbb{C}$ 上の正則関数とする。この時

(1) $f + g$ は U 上正則で $(f + g)' = f' + g'$ 。

(2) fg は U 上正則で $(fg)' = f'g + fg'$ 。

(3) $z_0 \in U$ において $g(z_0) \neq 0$ なら f/g は z_0 で正則で $(f/g)' = (f'g - fg')/g^2$ 。

1.3 Cauchy-Riemann 方程式

教科書 [今吉, §3.2.2, §3.3] や前期の講義ノート [吉田, §4.2] も参照のこと。

引き続き関数といったら複素数値関数のこととする。

定理 1.3.1 ([今吉, 定理 3.7, コーシー・リーマン方程式 (必要十分条件)]). f を開集合 $U \subset \mathbb{C}$ 上の関数とし,

$$z = x + iy, \quad f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

を実部と虚部への分解とする。

(1) $z_0 = x_0 + iy_0 \in U$ において関数 $f = u + iv$ が正則ならば次の **Cauchy-Riemann** 方程式が成立する。

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0).$$

(2) 逆に二変数実関数 u と v が開集合 $U \subset \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ 上で二条件

- 連続微分可能 (導関数が存在し, それは連続)
- Cauchy-Riemann 方程式が成立する

を満たすなら, $f = u + iv$ は U 上正則である。

以下のように二つの作用素を定義する。

$$\frac{\partial}{\partial z} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

$\frac{\partial}{\partial z}$ を正則微分 (作用素), $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ を反正則微分 (作用素) と呼ぶ。

命題 1.3.2 ([今吉, 定理 3.10, コーシー・リーマン方程式の複素形]). もし f が $z_0 = x_0 + iy_0 \in U$ で正則なら

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0, \quad f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0).$$

1.4 冪級数と正則関数

教科書 [今吉, 付録 A.1] や前期の講義ノート [吉田, §2, §4.4] も参照のこと.

冪級数の収束について基本的な事実を思い出しておこう. 以下 $[0, +\infty] := \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$ と書く.

定理 1.4.1 (収束半径の存在 [今吉, 定理 A.10]). 複素数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ から定まる冪級数

$$a(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N a_n z^n$$

に対し, 次の二条件を満たす $R \in [0, \infty]$ が一意に存在する.

- $|z| < R$ なら $a(z)$ は絶対収束する.
- $|z| > R$ なら $a(z)$ は収束しない.

この R を冪級数 $a(z)$ の ($z = 0$ を中心とする) 収束半径 (radius of convergence) と呼ぶ.

また領域 $D_0(R) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$ を収束円板 (disk of convergence) と呼ぶ.

次の場合であれば収束半径が比較的簡単に求まる.

定理 1.4.2 ([今吉, 定理 A.7, Ratio test]). 極限

$$R := \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \in [0, +\infty]$$

が存在すれば, この R が定理 1.4.1 の収束半径である.

例 1.4.3. 次の冪級数の半径は $+\infty$, つまり任意の $z \in \mathbb{C}$ について収束する.

$$\exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

この冪級数で定まる z の関数 $\exp(z)$ を指数関数 (exponential function) と呼ぶ.

例 1.4.4. 次の三つの冪級数の収束半径はどれも 1 である.

$$(1) \sum_{n=0}^{\infty} z^n. \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1}. \quad (3) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} z^n / n. \quad (4) \sum_{n=1}^{\infty} z^n / n^2.$$

一方, 収束半径の円周上では冪級数は収束することあれば発散することもある. 例えば上の (4) は $|z| = 1$ の全ての z で収束するが, (1) は $z = -1$ で発散する.

定理 1.4.2 が使えない場合があることも思い出しておこう. 例えば

例 1.4.5. 冪級数 $a(z) := \sum_{n=0}^{\infty} z^{2n} / (2n)!$ について, $a_{2n} := 1 / (2n)!$ および $a_{2n+1} := 0$ とすると $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n / a_{n+1}|$ は存在しない. しかし $z^2 = w$ とすれば $a(z) = \lim_{n \geq 0} w^n / (2n)!$ だから, $b_n = 1 / (2n)!$ として $\lim_{n \rightarrow \infty} |b_n / b_{n+1}| = \infty$ となるので, $a(z)$ の収束半径は ∞ である.

任意の冪級数の収束半径は次の定理で与えられる. 以下 $1/0 := \infty$, $1/\infty := 0$ と約束する. また実数列の上極限 $\overline{\lim}$ については §1.6 を参照せよ.

定理 1.4.6. 冪級数 $a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ の収束半径 R は次の等式を満たす.

$$R = \left(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n} \right)^{-1}.$$

例 1.4.7. • 例 1.4.4 (1) の冪級数 $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ の収束半径は $(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} 1^{1/n})^{-1} = 1^{-1} = 1$.

- 例 1.4.3 の指数関数 $\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n/n!$ の収束半径は $(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (1/n!)^{1/n})^{-1} = 1/0 = \infty$.
- 例 1.4.5 の冪級数 $\sum_{n=0}^{\infty} z^{2n}/(2n)!$ の収束半径は, $a_{2n} := 1/(2n)!$ および $a_{2n+1} := 0$ として

$$\left(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n^{1/n} \right)^{-1} = 1/0 = \infty.$$

さて, 冪級数はその収束半径の内側で正則関数を定めることを思い出そう.

定理 1.4.8 ([今吉, 定理 A.14]). 冪級数 $a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ はその収束円板上での正則関数 a を定める. そして収束円板での a の微分は次の冪級数で与えられる.

$$a'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$$

更に冪級数 $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ の収束半径は $a(z)$ の収束半径と等しい.

定理 1.4.8 を繰り返し用いると

定理 1.4.9. 冪級数は収束円板上で無限回微分可能な関数を定める.

開集合 $U \subset \mathbb{C}$ 上の関数 f が $z_0 \in U$ で解析的 (analytic) であるとは, z_0 のある近傍において $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ と z_0 を中心とする冪級数で書けることをいう. f が U の任意の点で解析的であるとき, f は U 上解析的であるという. 定理 1.4.8 を言い直すと, 開集合 U 上解析的な関数は U 上正則な関数である.

実は逆に正則関数は解析的, つまり級数展開を持つことが知られている. これは Cauchy の積分定理の応用として §6 で扱う予定である.

例. • 例 1.4.3 の指数関数 $\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n/n!$ について

$$\exp'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n = \exp(z).$$

- 例 1.4.4 (1) の冪級数 $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ は $D_0(1) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ 上の正則関数

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

を定める. 両辺を k 回微分して, 二項係数 $\binom{n+k}{k} := {}_{n+k}C_k = n(n-1)\cdots(n-k+1)/k!$ を用いると

$$\frac{1}{(1-z)^k} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{n} z^n.$$

1.5 初等関数

教科書 [今吉, §2.3] や前期の講義ノート [吉田, §3] も参照のこと.

例 1.4.3 の指数関数 $e^z := \exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n/n!$ を用いて三角関数 (trigonometric functions) を

$$\begin{aligned}\cos z &:= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}, & \sin z &:= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}, \\ \tan z &:= \frac{\sin z}{\cos z}, & \cot z &:= \frac{1}{\tan z}, & \sec z &:= \frac{1}{\cos z}, & \operatorname{cosec} z &:= \frac{1}{\sin z}\end{aligned}$$

と定義する. $e^{\pm iz}$ や $\cos z$ 及び $\sin z$ は周期 2π を持つ.

同様に双曲線関数 (hyperbolic function) を

$$\begin{aligned}\cosh z &:= \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}, & \sinh z &:= \frac{e^z - e^{-z}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \\ \tanh z &:= \frac{\sinh z}{\cosh z}, & \coth z &:= \frac{\cosh z}{\sinh z}, & \operatorname{sech} z &:= \frac{1}{\cosh z}, & \operatorname{cosech} z &:= \frac{1}{\sinh z}\end{aligned}$$

と定義する. $e^{\pm z}$ や $\cosh z$ 及び $\sinh z$ は周期 $2\pi i$ を持つ.

次に逆関数の定義を思い出そう. 関数 f に対して $g(f(z)) = z$ 及び $f(g(z)) = z$ を満たす関数 g を f の逆関数と呼び $f^{-1}(z)$ と書く. 例えば, n を整数として, n 乗関数 z^n の逆関数は n 乗根と呼ばれ $z^{1/n}$ と書かれる.

合成関数の微分から次の主張が従う.

命題 1.5.1 ([杉浦, 第 III 章 §4 定理 4.1]). 関数 f が逆関数 f^{-1} を持ち, f が z で正則かつ f^{-1} が $w := f(z)$ において連続な場合, f^{-1} は w において正則で

$$(f^{-1})'(w) = \frac{1}{f'(z)}.$$

逆関数は存在したとしても一意とは限らない. 例えば n 乗関数 z^n の逆関数は, 極座標表示 $z = re^{i\theta}$ に対して

$$z^{1/n} = r^{1/n} e^{i\theta/n + 2\pi i k/n} \quad (k = 0, 1, \dots, n-1)$$

と n 個の候補がある. 通常の意味の関数を定めるにはこの候補のうちから一つ指定する必要がある. 指定しない場合は n 価関数であるという.

例 1.4.3 の指数関数 $e^z := \exp(z)$ の逆関数を対数関数 (logarithmic function) と呼び $\log z$ と書く. $\log z$ も一意ではなく, 極座標表示 $z = re^{i\theta}$ に対して

$$\log z = \log r + i(\theta + 2\pi n) \quad (n \in \mathbb{Z})$$

と可算無限個の候補がある. 但し $\log r$ は正の実数 r に対する対数関数であり, こちらは一意に定まっている. 候補を指定しないときの $\log z$ は無限多価関数であるという.

定義. $D := \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$ の元 $z \in D$ に対し

$$z = re^{i\theta}, \quad r > 0, \quad -\pi < \theta < \pi$$

となる実数 r と θ が一意に決まる. これらを用いて $z \in D$ の対数の主値 (principal value of logarithm) $\operatorname{Log} z$ を次で定義する.

$$\operatorname{Log} z := \log r + i\theta.$$

関数 $\operatorname{Log} z$ は D 上の連続関数であり, 指数関数 e^z の逆関数である. すると命題 1.5.1 より

命題. $\operatorname{Log} z$ は D 上の正則関数である. 更に $|z| < 1$ において次の等式が成立する.

$$\operatorname{Log}(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n.$$

証明. 後半のみ示す. w の指数関数 e^w について $(e^w)' = e^w$ だから, 命題 1.5.1 より, $z = e^w$ として

$$(\operatorname{Log} z)' = 1/(e^w)' = 1/e^w = 1/z.$$

$|z| < 1$ なら $1+z \in D$ であることに注意して, $(\operatorname{Log}(1+z))' = 1/(1+z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n$. 両辺を積分して $z=0$ での値を見ることにより結論を得る. \square

証明の最後で次の定理を用いた.

定理 ([今吉, 定理 A.13]). 冪級数 $a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ は正の収束半径を持つものとする. このとき

$$\int_0^{z_1} a(z) dz = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} z_1^{n+1}.$$

但し積分路及び z_1 は収束円板の内部にあるものとする.

対数の主値を用いて複素数冪の冪関数を定義することができる.

定義. $D := \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$ とする. $\alpha \in \mathbb{C}$ と $z \in D$ に対して

$$z^\alpha := \exp(\alpha \operatorname{Log} z).$$

$\alpha \in \mathbb{Z}$ の時は通常の冪関数であり, $\alpha = 1/n \in \mathbb{Q}$ の時は前述の n 乗根 (の主値) である.

冪関数が複素数冪に一般化できたので, 二項定理 $(1+z)^k = \sum_{n=0}^k \binom{k}{n} z^n$ を複素数冪に一般化しよう.

命題 1.5.2. 任意の $\alpha \in \mathbb{C}$ と $z \in D_0(1) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ に対し^{*2}

$$(1+z)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n, \quad \binom{\alpha}{n} := \begin{cases} \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)/n! & (n \geq 1) \\ 1 & (n=0) \end{cases}.$$

証明は演習問題とする.

三角関数の逆関数を逆三角関数と呼ぶ. 以下の命題の証明は演習問題とする.

命題 1.5.3. 冪級数

$$\operatorname{Arcsin} z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{z^{2n+1}}{2n+1}$$

の収束半径は 1 であり, それが定める収束円板 $D_0(1)$ 上の正則関数 $\operatorname{Arcsin} z$ は正弦関数 $\sin z$ の逆関数である. これを逆正弦関数と呼ぶ. また $D_0(1)$ 上の正則関数

$$\operatorname{Arccos} z := \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arcsin} z$$

は余弦関数 $\cos z$ の逆関数であり, それを逆余弦関数と呼ぶ.

^{*2} ver. 0.3 で訂正しました

命題 1.5.4. 冪級数

$$\operatorname{Arctan} z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} z^{2n+1}$$

の収束半径は 1 であり, それが定める収束円板 $D_0(1)$ 上の正則関数 $\operatorname{Arctan} z$ は正接関数 $\tan z$ の逆関数である. これを逆正接関数と呼ぶ.

なお, 有理関数, 指数関数, 対数関数, 三角関数, 逆三角関数, およびこれらの関数の有限回の合成で得られる関数を初等関数 (elementary function) と呼ぶことがある.

1.6 附録: 上極限と下極限

この副節は [杉浦, 第 I 章 §§1–3] を参照せよ. まず実数列の上極限と下極限の定義を思い出す.

定義. $\{a_n\}_{n \geq 0}$ を実数列とする.

- (1) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $a_n \leq u$ となる実数 $u \in \mathbb{R}$ を $\{a_n\}_{n \geq 0}$ の上界 (upper bound) と呼ぶ. 上界が存在する実数列のことを上に有界な実数列という.
- (2) 以下の二条件を満たす $s \in \mathbb{R}$ を $\{a_n\}_{n \geq 0}$ の上限 (supremum) と呼び, $s = \sup_{n \geq 0} a_n$ と書く.
 - (i) s は $\{a_n\}_{n \geq 0}$ の上界である.
 - (ii) $t < s$ となる任意の $t \in \mathbb{R}$ は $\{a_n\}_{n \geq 0}$ の上界でない.

同様に実数列の下界 (lower bound) と下限 (infimum) が定義される. またこれらの定義は数列だけではなく部分集合 $S \subset \mathbb{R}$ に対しても同様に定義できる. ここで実数の集合 \mathbb{R} の基本的な性質を思い出しておこう.

定理 1.6.1 ([杉浦, 第 I 章 §3 定理 3.1]). 上に有界な単調増加実数列は収束する.

注意 ([杉浦, 第 I 章 §3 注意 4]). この性質は \mathbb{R} の連続性と同値. 正確に言うと, 以下の命題は全て同値である.

- 上に有界な実数列は上限を持つ (連続の公理).
- 上に有界な単調増加実数列は収束する.
- Archimedes の原理と区間縮小法が成立する.
- 有界実数列は収束部分列を持つ (Bolzano-Weierstrass の定理).
- Cauchy 列は収束する.

実数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ から新たに数列 $\{s_n\}_{n \geq 0}$ を

$$s_n := \sup_{m \geq n} a_m = \sup\{a_m\}_{m \geq n} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

と定義する. 但し最後の $\in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ は, \sup が存在しなければ $+\infty$ と定義する, という意味である. $\{a_m\}_{m \geq n} \supset \{a_m\}_{m \geq n+1}$ だから $s_n \geq s_{n+1}$ となることに注意すると, $\{s_n\}_{n \geq 0}$ は単調減少数列だと分かる. すると定理 1.6.1 より数列 $\{s_n\}_{n \geq 0}$ は $n \rightarrow \infty$ で収束するか $\pm\infty$ に発散する. そこで

定義. 実数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ の上極限 (limit superior) を次のように定義する.

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n := \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sup_{m \geq n} a_m) \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}.$$

同様に下極限 (limit inferior) $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$ も定義できる.

参考文献

- [今吉] 今吉洋一, 複素関数概説, サイエンス社 (1997).
- [SS] E. M. Stein, R. Shakarchi, *Complex Analysis*, Princeton lectures in Analysis II, Princeton University Press (2003); 日本語訳: エリアス・M. スタイン, ラミ・シャカルチ著, 新井仁之, 杉本充, 高木啓行, 千原浩之訳, プリンストン解析学講義 II 複素解析, 日本評論社 (2009).
- [杉浦] 杉浦光夫, 解析入門 I, 東京大学出版会 (1980).
- [吉田] 吉田伸夫, 複素関数論, 前期講義「複素関数論」の講義ノート (2019).

以上です.