数学演習 VII · VIII　7 月 25 日分補遺[*1]

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp
https://math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida/2019S78.html

付録 B　微分形式と de Rham コホモロジー

ここでは多様体上の微分形式と de Rham コホモロジーについて解説をする．

多様体の定義は既知とする．単に多様体といったら C^∞ 級の多様体の意味とする．

B.1　微分形式

B.1.1　外積代数

まず外積代数の復習をする．

V を体 $\mathbb{K}$ 上の線形空間とする．V の**テンソル空間** (tensor space)

$$T^\bullet V = \oplus_{k\in\mathbb{N}} T^k V, \quad T^k V := V^{\otimes k} = V \otimes_{\mathbb{K}} \cdots \otimes_{\mathbb{K}} V$$

には

$$T^k V \times T^l V \longrightarrow T^{k+l} V, \quad \big((v_1 \otimes \cdots \otimes v_k), (w_1 \otimes \cdots \otimes w_l)\big) \longmapsto v_1 \otimes \cdots \otimes v_k \otimes w_1 \otimes \cdots \otimes w_l$$

で $\mathbb{N}$ 次数付きの (非可換) 結合代数の構造が入る．この結合代数 $T^\bullet V$ を V の**テンソル代数** (tensor algebra) と呼んだ．このテンソル代数の両側イデアル I を

$$I := I := \langle v \times v \ (v \in V)\rangle$$

で定義する．このイデアルによる商 $T^\bullet V/I$ はやはり結合代数であるが，それを V の**外積代数** (exterior algebra) と呼んだ．テンソル代数の $\mathbb{N}$ 次数構造が遺伝することに注意して，V の外積代数を

$$\wedge^\bullet V = \oplus_{k\in\mathbb{N}} \wedge^k V$$

と書き，$\wedge^k V$ の元を次のように書く．

$$T^k \longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow \wedge^k V, \quad v_1 \otimes \cdots \otimes v_k \longmapsto v_1 \wedge \cdots \wedge v_k.$$

$\mathbb{K}$ の標数が 2 でなければ，両側イデアル $I \subset T^\bullet V$ は

$$J := \langle v \times w + w \times v \ (v, w \in V)\rangle$$

に等しい．多様体の教科書ではこの J を使った定義の方がよく使われる．$\mathbb{K}$ の標数が 2 だと $J \subsetneq I$ である．

V が有限次元で $\dim V = n$ なら $\dim \wedge^k V = \binom{n}{k}$ である．$v_1, \ldots, v_n$ を V の基底とすると $\wedge^k V$ の基底として次の v_I 達が取れる

$$v_I := v_{i_1} \wedge \cdots \wedge v_{i_k} \quad (I = \{i_1 < \cdots < i_k\} \subset \{1, \ldots, n\})$$

特に $l > n$ ならば $\wedge^l V = 0$ である．また σ を k 文字の置換とし，その符号を $\mathrm{sgn}(\sigma)$ と書くと

$$v_{\sigma(I)} = (-1)^{\mathrm{sgn}(\sigma)} v_I.$$

[*1] 2019/07/25 版, ver. 0.2.

B.1.2　ベクトル束の外積

次に多様体上のベクトル束とその外積を思い出そう．

$r \in \mathbb{Z}_{>0}$ とする．多様体 M 上の **(実) ベクトル束** E とは, 多様体 E と多様体の全射 $\pi : E \twoheadrightarrow M$ の組であって, 以下の二条件を満たすものであった．

- π のファイバーは全て有限次元実線形空間の構造を持つ．
- 各 $p \in M$ に対しある開近傍 $p \in U \subset M$ と $r \in \mathbb{N}$ 及び微分同相写像 $\varphi : \pi^{-1}(U) \xrightarrow{\sim} U \times \mathbb{R}^r$ が存在し, 各 $q \in U$ のファイバーへの制限 $\varphi|_{\pi^{-1}(q)}$ が線形同型 $\pi^{-1}(q) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^r$ を与える．

この場合 E のことを**全空間** (total space), M のことを**底空間** (base space) と呼ぶ．また φ を**局所自明化 (写像)** (local trivialization) と呼ぶ．

各 $p \in M$ に対して定まる $r \in \mathbb{N}$ は局所定数であるが, 特に任意の $p \in M$ に対して同じ値 r_0 を取る場合, つまり M の任意の連結成分上で r が同じ値 r_0 を取る場合, E を**階数** (rank) r_0 のベクトル束と呼んだ．

ベクトル束に対して函手的に新しいベクトル束が構成できる．以下 $\pi : E \twoheadrightarrow M$ を多様体 M 上のベクトル束とする．また $n \in \mathbb{N}$ とする．

- E の**双対ベクトル束** (dual vector bundle) とは, M 上のベクトル束であって, 各 $p \in M$ でのファイバーが線形空間 $\pi^{-1}(p)$ の双対空間になるもののことである．
- E の n **次のテンソル積** $E^{\otimes n}$ (tensor product) とは, M 上のベクトル束であって各 $p \in M$ でのファイバーが線形空間のテンソル積 $(\pi^{-1}(p))^{\otimes n}$ で与えられるものである．
- E の n 次の外積 $\wedge^n E$ (exterior product) とは, M 上のベクトル束であって各 $p \in M$ でのファイバーが線形空間の外積 $\wedge^n(\pi^{-1}(p))$ で与えられるものである．

§B.1.1 で復習したように, 線形空間の外積は, 斉次部分だけを見るのではなく, 全体を見れば環構造を持つ．従ってベクトル束 E についても,

$$\wedge^\bullet E := \oplus_{n\in\mathbb{N}} \wedge^n E$$

は各ファイバーが環構造を持つベクトル束になっている．

B.1.3　微分形式

多様体 M に対して, 接ベクトル束 TM とその双対ベクトル束である余接ベクトル束 T^*M が定まる．どちらの階数も $\dim M$ であった．これらに §B.1.2 の函手的構成を施して, M 上の新しいベクトル束が得られる．

定義. M を n 次元多様体とする．また $0 \le k \le n$ とする．M 上の**微分** k **形式**とは, M 上のベクトル束 $\wedge^k T^*M$ の C^∞ 級切断のことである．それら全体のなす実線形空間を次のように書く．

$$A^k(M) := \Gamma_{C^\infty}(M, \wedge^k T^*M).$$

特に $A^0(M) = C^\infty(M)$ であることに注意する．

T^*M の局所自明化として次のようなものが取れた: $U \subset M$ をアトラスの一部, $x_1, \ldots, x_n$ をその局所座標として, $p \in U$ でのファイバーは $dx_1, \ldots, dx_n$ を基底とする線形空間となる．すると $\wedge^k T^*M$ の $p \in U$ でのファイバーの基底は

$$dx_I := dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \quad (I = \{i_1 < \cdots < i_k\} \subset \{1, \ldots, n\})$$

と書ける. そして $\omega \in A^k(M)$ は, U 上では次のように書ける.

$$\omega(p) \;=\; \sum_{I \subset \{1,\dots,n\},\ |I|=k} f_I(p)\, dx_I.$$

$\wedge^\bullet T^*M$ の代数構造 $\wedge$ から, 次のような双線形写像が定まることに注意する.

$$\wedge : A^k(M) \times A^l(M) \longrightarrow A^{k+l}(M), \quad (f dx_I) \wedge (g dx_J) \;:=\; fg dx_I \wedge dx_J.$$

微分形式の局所表示を用いて外微分が定義できる.

定義. 外微分 (exterior differentiation) とは, 次のように定義される線形写像のことである.

$$d : A^k(M) \longrightarrow A^{k+1}(M), \quad \omega \;=\; f\, dx_I \longmapsto d\omega \;:=\; \sum_j \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_I.$$

正確にはこれが well-defined であることを示す必要があるが, ここでは略す. この定義から直接, 次の主張を示すことができる.

補題 B.1.1. 外微分は次の性質を持つ.
(1) $d \circ d = 0 : A^k(M) \to A^{k+2}(M)$.
(2) $\omega \in A^k(M)$ に対して $d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta$.

B.2 de Rham コホモロジー

前副節の補題 B.1.1 (1) から, 線形写像の列

$$\cdots \to 0 \to A^0(M) = C^\infty(M) \xrightarrow{d} A^1(M) \xrightarrow{d} A^2(M) \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} A^{n-1}(M) \xrightarrow{d} A^n(M) \to 0 \to \cdots$$

であって隣どうしの写像を合成すると 0 になるものが得られた. このような列を**複体** (complex) と呼ぶ. 特に多様体 M に対して微分形式の空間と外微分から上のように作った複体を **de Rham 複体**と呼び, $(A^\bullet(M), d)$ と表す.

線形空間からなる複体 $(K^\bullet, d)$ に対して, その n 次コホモロジー $H^n(K^\bullet, d)$ とは次のような商線形空間のことであった.

$$H^n(K^\bullet, d) \;:=\; \mathrm{Ker}(d : K^n \to K^{n+1}) / \mathrm{Im}(d : K^{n-1} \to K^n).$$

定義. 多様体 M の **de Rham コホモロジー** $H^*_{\mathrm{dR}}(M)$ とは, de Rham 複体のコホモロジーのことである.

$$H^*_{\mathrm{dR}}(M) \;:=\; H^*(A^\bullet(M), d).$$

このように de Rham コホモロジーは M の多様体の構造を用いて定義されている. それが実は M の位相空間としての構造のみにしか依存しない, というのが次に述べる **de Rham** の定理である.

定理 (de Rham の定理). de Rham コホモロジーは M の $\mathbb{R}$ 係数特異コホモロジー群と同型.

$$H^*_{\mathrm{dR}}(M) \simeq H^*(M, \mathbb{R}).$$

B.3　文献紹介

[森田 1] が良い教科書です．余裕があればその続編 [森田 2] に進んでください．

参考文献

[森田 1] 森田茂之, **微分形式の幾何学**, 岩波書店, 2005.

[森田 2] 森田茂之, **特性類と幾何学**, 岩波書店, 2008.