数学演習 VII・VIII　7 月 25 日分解答[*1]

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp
https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida/2019S78.html

13　復習 3

13.1　群論

問題 13.1. 結合則について.

$$\begin{aligned}\big((h_1,n_1)*(h_2,n_2)\big)*(h_3,n_3) &= (h_1h_2, n_1\varphi_{h_1}(n_2))*(h_3,n_3) = \big(h_1h_2h_3, n_1\varphi_{h_1}(n_2)\varphi_{h_1h_2}(n_3)\big),\\ (h_1,n_1)*\big((h_2,n_2)*(h_3,n_3)\big) &= (h_1,n_1)*(h_2h_3, n_2\varphi_{h_2}(n_3)) = \big(h_1h_2h_3, n_1\varphi_{h_1}(n_2\varphi_{h_2}(n_3))\big)\end{aligned}$$

より $n_1\varphi_{h_1}(n_2)\varphi_{h_1h_2}(n_3) = n_1\varphi_{h_1}(n_2\varphi_{h_2}(n_3))$ を示せば十分. それは

$$n_1\varphi_{h_1}(n_2)\varphi_{h_1h_2}(n_3) \overset{*1}{=} n_1\varphi_{h_1}(n_2)\cdot\varphi_{h_1}(\varphi_{h_2}(n_3)) \overset{*2}{=} n_1\varphi_{h_1}(n_2\varphi_{h_2}(n_3))$$

と示せる. ここで $*1$ では, φ が群準同型なので $\varphi_{h_1h_2} = \varphi_{h_1}\varphi_{h_2}$ となることを用いた. また $*2$ では, $\varphi_{h_1} \in \mathrm{Aut}(N)$ も群準同型なので $\varphi_{h_1}(nn') = \varphi_{h_1}(n)\cdot\varphi_{h_1}(n')$ となることを用いた.

単位元は (e_H, e_N) である. 実際, $\varphi_{e_H} = \mathrm{id}_N$ から

$$(e_H,e_N)*(h,n) = (h, e_N\cdot\varphi_{e_H}(n)) = (h, e_N\cdot n) = (h,n)$$

となり, また $\varphi_h(e_N) = e_N$ から

$$(h,n)*(e_H,e_N) = (h, n\cdot\varphi_h(e_N)) = (h, n\cdot e_N) = (h,n)$$

となる. これで単位元であることが示せた.

逆元は $(h,n)^{-1} = (h^{-1}, \varphi_h^{-1}(n^{-1}))$ となる. ここで $\varphi_h^{-1} \in \mathrm{Aut}(H)$ は $\varphi_h \in \mathrm{Aut}(H)$ の逆写像. 実際,

$$(h,n)*(h^{-1},\varphi_h^{-1}(n^{-1})) = \big(e_H, n\cdot\varphi_h(\varphi_h^{-1}(n^{-1}))\big) = (e_H, n\cdot n^{-1}) = (e_H,e_N)$$

および

$$\begin{aligned}(h^{-1},\varphi_h^{-1}(n^{-1}))*(h,n) &= \big(e_H, \varphi_h^{-1}(n^{-1})\cdot\varphi_{h^{-1}}(n)\big) \overset{*3}{=} \big(e_H, \varphi_h^{-1}(n^{-1})\cdot\varphi_h^{-1}(n)\big)\\ &= \big(e_H, \varphi_h^{-1}(n^{-1}n)\big) = (e_H,e_N)\end{aligned}$$

が成り立つ. 但し $*3$ で $\varphi_h^{-1} = \varphi_{h^{-1}}$ を用いた.

問題 13.2. 任意の $h \in H$ に対し $\varphi_h = \mathrm{id}_N$ なので, $(h_1,n_1)*(h_2,n_2) = (h_1h_2, n_1\varphi_{h_1}(n_2)) = (h_1h_2, n_1n_2)$ となり, 直積群における積になっている. よって $H \ltimes_{\mathrm{id}} N \simeq H \times N$.

問題 13.3. (1) $(h,e_N)\cdot(h',e_N) = (hh',e_N)$, $(h,e_N)^{-1} = (h^{-1},e_N)$ より写像 $H \to H'$, $h \mapsto (h,e_N)$ は群の同型写像. よって $H' \simeq H$.

(2) $(e_H,n)\cdot(e_H,n') = (e_H,nn')$, $(e_H,n)^{-1} = (e_H,n^{-1})$ より写像 $N \to N'$, $h \mapsto (h,e_N)$ は群の同型写像. よって $N' \simeq N$. また $(h,n)^{-1}(e_H,n')(h,n) = (h,n)^{-1}(h,n'n) = (h^{-1},\varphi_h^{-1}(n^{-1})(h,n'n) = \big(e_H, \varphi_h^{-1}(n^{-1})\varphi_{h^{-1}}(n'n)\big)$ より $N' \triangleleft G$ となる.

[*1] 2019/07/25 版, ver. 0.2.

(3) 任意の $(h,n) \in G$ は $(h,n) = (e_H, n)(h, e_H) \in N'H'$ と書けるので $G = N'H'$. また $N' \cap H' = \{(e_N, e_H)\} = \{e_G\}$.

問題 13.4. 求める群は位数 6 の二面体群 D_6. これは位数 2 の巡回群 C_2 と位数 3 の巡回群 C_3 の半直積として $D_6 \simeq C_2 \ltimes_\varphi C_3$ とも書ける. 群準同型 $\varphi : C_2 \to \mathrm{Aut}(C_3)$ は, $C_2 = \{e, s\}$, $C_3 = \{e, r, r^2\}$ と書くと, $\varphi_e = \mathrm{id}_{C_3}$, $\varphi_s(r) = r^2$, $\varphi_s(r^2) = r$ で定まるもの.

G が条件を満たすことは明らか. 最小位数であることは次のようにわかる: 位数が $2, 3, 5$ の群は素数位数なので巡回群である. 位数が 4 の群のうち巡回群 C_4 でないものは $C_2 \ltimes_\varphi C_2$ と書けるが, $\varphi(e) = \varphi(s) = \mathrm{id}_{C_2}$ となるしかないので, 直積 $C_2 \times C_2$ になる. よって求める群の位数は少なくとも 6 である.

位数 6 の群のうち条件を満たすものが D_6 しかないことは次のようにわかる: Sylow の定理より位数 2 の元 s と位数 3 の元 r があるが, srs^{-1} も位数 3 だから $srs^{-1} = r$ または r^2. 前者は $C_2 \times C_3 \simeq C_6$ であり, 条件を満たさない. 後者が二面体群にあたる.

13.2　Lebesgue 積分論

問題 13.5. $x \in (0, \infty)$ で $|t^{-1}\sin(tx)| \le x$ であり $x(e^x - 1)^{-1}$ は可積分だから, Lebesgue 優収束定理が適用できて

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \int_0^\infty \frac{1}{e^x - 1} \sin(tx)\, dx \;=\; \int_0^\infty \lim_{t \to 0} \Big(\frac{1}{e^x - 1} \frac{1}{t} \sin(tx) \Big)\, dx \;=\; \int_0^\infty x(e^x - 1)^{-1}\, dx.$$

あとは $e^{-x} = u$ と変数変換して

$$\int_0^\infty x(e^x - 1)^{-1}\, dx \;=\; \int_0^\infty (-\log u)(u - 1)^{-1}\, du \;=\; \frac{\pi^2}{6}.$$

問題 13.6. $\log(1+x) = \sum_{n=1}^\infty (-x)^n/n$ と $x = 0$ まわりで Taylor 展開すると,

$$\sum_{n=1}^\infty \int_0^1 -\frac{1}{n} x^n \log x\, dx \;=\; \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n(n+1)} \int_0^1 x^n\, dx \;=\; \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n(n+1)^2} \;<\; \infty.$$

よって和と積分の順序が交換できて,

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \log x\, \log(1+x)\, dx \;=\; \sum_{n=1}^\infty \int_0^1 \frac{1}{n}(-x)^n \log x\, dx \;=\; \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{n(n+1)^2} \\
&= \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{n} + \sum_{n=2}^\infty \frac{(-1)^n}{n} + \sum_{n=2}^\infty \frac{(-1)^n}{n^2} \;=\; 2 - 2\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{n} - \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} + 2\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{(2n)^2} \\
&= 2 - 2\log 2 - \frac{1}{12}\pi^2.
\end{aligned}$$

問題 13.7. 先に y 積分をして得られる

$$\int_0^\infty \Big(\int_0^\infty y e^{-xy}\, dy \Big) |\sin^3 x|\, dx$$

を考えると,

$$\int_0^\infty y e^{-xy}\, dy \;=\; x^{-2}, \quad \int_0^1 x^{-2} |\sin^3 x|\, dx \;\le\; \int_0^1 x\, dx \;<\; \infty, \quad \int_1^\infty x^{-2} |\sin^3 x|\, dx \;\le\; \int_1^\infty x^{-2}\, dx \;<\; \infty$$

となるので, Fubini の定理が適用できる. 求める積分を I とおくと,

$$I \;=\; \int_0^\infty \int_0^\infty y e^{-xy} \sin^3 x\, dx dy \;=\; \int_0^\infty \Big(\int_0^\infty e^{-xy} \sin^3 x\, dx \Big) y\, dy.$$

ここで $\sin^3 x = (3\sin x - \sin 3x)/4$, $\int_0^\infty e^{-ax}\sin bx = b/(a^2+b^2)$ を使うと

$$I = \int_0^\infty \Big(\frac{3}{4}\frac{1}{1+y^2} - \frac{1}{4}\frac{3}{9+y^2}\Big) y\,dy = \frac{3}{8}\int_0^\infty \Big(\frac{1}{1+t} - \frac{1}{9+t}\Big)\,dt = \frac{3}{4}\log 3.$$

13.3　微分方程式

問題 13.8. x の関数として, $\sin(x+y)$ と $\sin x\cos y + \cos x \sin y$ はともに常微分方程式 $u''(x)+u(x)=0$, $u(0)=\sin(y)$, $u'(0)=\cos(y)$ の解なので, 両者は一致する.

同様に, $\cos(x+y)$ と $\cos x\cos y - \sin x\sin y$ はともに常微分方程式 $v''(x)+v(x)=0$, $v(0)=\cos(y)$, $v'(0)=-\sin(y)$ の解なので, 両者は一致する.

問題 13.9. 微分方程式の y' の項を消去するために

$$\xi = \int e^{-\int^x (-t)/(1-t^2)dt}dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x \iff x = \sin\xi$$

と変数変換すると, 微分方程式は

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + c^2 y = 0 \iff \frac{d^2y}{d\xi^2} + c^2 y = 0$$

となる. よって一般解は, c_1 と c_2 を積分定数として

$$x(t) = c_1\cos(c\xi) + c_2\sin(c\xi) = c_1\cos(c\arcsin x) + c_2\sin(c\arcsin x).$$

問題 13.10. $y = e^{\lambda x}$ を代入して $\lambda^3 + a(x)\lambda^2 + b(x)\lambda + c(y) = 0$. この解が $\lambda = 1, \pm 2i$ になればよいから, $\lambda^3 + a(x)\lambda^2 + b(x)\lambda + c(y) = (\lambda-1)(\lambda^2+4)$. よって $a(x)=-1$, $b(x)=4$, $c(x)=-4$.

問題 13.11. (1) $|x(t)|^2 = {}^T x(t)\cdot x(t)$ を微分すると

$$\begin{aligned}\frac{d|x(t)|^2}{dt} &= \frac{d\,{}^T x(t)}{dt}\cdot x(t) + {}^T x(t)\cdot\frac{dx(t)}{dt} = {}^T\big(A(t)x(t)\big)\cdot x(t) + {}^T x(t)\cdot A(t)x(t)\\ &= {}^T x(t)\cdot\big(A(t) + {}^T A(t)\big)\cdot x(t) = 0.\end{aligned}$$

よって $|x(t)|$ は t に依存しない.

(2) ${}^T R(t)\cdot R(t) = I_n$ を示せばよい. $\frac{d}{dt}R(t) = A(t)R(t)$ より $\frac{d}{dt}\big({}^T R(t)\big) = {}^T R(t)\cdot{}^T A(t)$. よって

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\big({}^T R(t)\cdot R(t)\big) &= {}^T R(t)\cdot\Big(\frac{d}{dt}R(t)\Big) + \Big(\frac{d}{dt}{}^T R(t)\Big)\cdot R(t)\\ &= {}^T R(t)\cdot A(t)R(t)\cdot{}^T R(t) + {}^T R(t){}^T A(t)\cdot R(t)\\ &= {}^T R(t)\big(A(t) - A(t)\big)R(t) = 0.\end{aligned}$$

よって ${}^T R(t)\cdot R(t)$ は t に依存しない. ${}^T R(0)\cdot R(0) = I_n$ なので示せた.

以上です.