数学演習 VII・VIII　7 月 18 日分小テスト解答*1

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp
https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida

問題. 次の Lebesgue 積分を計算せよ.

$$\int_0^1 \int_y^1 x^2 e^{xy}\, dxdy.$$

解答. 被積分関数は連続関数だから可測関数. また正なので Fubini の定理が使える. 積分領域が

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le y \le 1,\ y \le x \le 1\} \ = \ \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x\}$$

となることに注意して

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_y^1 x^2 e^{xy}\, dxdy \ &= \ \int_0^1 \int_0^x x^2 e^{xy}\, dydx \ = \ \int_0^1 \Big[x e^{xy} \Big]_{y=0}^{x} dx \ = \ \int_0^1 (x e^{x^2} - x)\, dx \\ &= \ \Big[\frac{1}{2} e^{x^2} - \frac{1}{2} x^2 \Big]_0^1 \ = \ \frac{e}{2} - 1. \end{aligned}$$

コメント. Fubini の定理が適用できることの議論を 2 点, 求積を 3 点で採点しました. 平均点は 2.7 点でした. この問題は完答できるようにして下さい.

連絡事項

7/18 までの発表・小テスト・レポートの総得点を, 今回返却した小テストに書きました. 赤丸で囲んである数字が総得点です. 以下のような人数分布で成績を付ける予定です.

総得点	∼ 49	50 ∼ 89	90 ∼ 169	170 ∼
成績	C	B	A	S
人数	3	9	5	2

以上です.

*1 2019/07/18 版, ver. 0.1.