数学演習 VII・VIII　7 月 11 日分小テスト解答[*1]

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp
https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida/2019S78.html

問題. ベクトルまたは行列 X の転置を ${}^tX$ と表す. 次式で与えられる 3 次特殊直交群 SO(3) を考える.

$$\mathrm{SO}(3) := \{A \mid \text{実数成分の 3 次正方行列},\ A\,{}^tA = I_3,\ \det A = 1\}.$$

(1) 2 次元球面 $S^2 = \{v = {}^t(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ に群 SO(3) が $A.v := A\,v$ (行列とベクトルの乗法) で作用することを確認せよ.

(2) (1) の群作用における軌道を全て求めよ.

解答. (1) 任意の $A \in \mathrm{SO}(3)$ と $v \in S^2$ に対し $A\,v \in S^2$ となることを示せばよい.

$$|A\,v|^2 \;=\; {}^t(A\,v)\,(A\,v) \;=\; {}^tv\,{}^tA\,A\,v \;=\; {}^tv\,v \;=\; 1$$

より $|A\,v| = 1$ となり, 示せた.

(2) どの $v \in S^2$ の軌道も $O_{\mathrm{SO}(3)}(v) = S^2$ となる.
任意の $u \neq v \in S^2$ に対しある $A \in \mathrm{SO}(3)$ が存在して $A.u = v$ となることを示せばよい.

$$w \;:=\; u \times v \ (\text{3 次元ベクトルの外積}), \quad v' \;:=\; w \times u$$

とすれば $\{u, v', w\}$ は正規直交基底になるので, この 3 つのベクトルを並べてできる 3 次正方行列

$$B \;:=\; (u, v', w)$$

は SO(3) の元になる. また $\mathbb{R}^3$ の標準基底 e_1, e_2, e_3 について $B\,e_1 = u$, $B\,e_2 = v'$, $B\,e_3 = w$ となる.
同様に $u' := v \times w$ とすれば $\{v, w, u'\}$ も正規直交基底になり,

$$C \;:=\; (v, w, u') \;\in\; \mathrm{SO}(3).$$

また $C\,e_1 = v$, $C\,e_2 = w$, $C\,e_3 = u'$ となる. そこで

$$A \;:=\; C\,B^{-1} \;\in\; \mathrm{SO}(3)$$

とすれば $A.u = C(B^{-1}u) = Ce_1 = v$ となり, 求めたかった A が定まった.

コメント. $2 + 3$ 点で採点しました. 平均点は 2.2 点でした.

(1) で $A_1.(A_2.v) = (A_1A_2).v$ や $I_3.v = v$ は行列の演算から明らかなので, 議論するべき部分は $A.v \in S^2$ の方です. それを議論していない答案が多かったのですが, 注意しましょう.

SO(3) はユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ の原点を中心とする回転のなす群で, 当然球面 S^2 を保つはずです. そして球面上の任意の二点は適当な回転で写りあうので, 軌道は球面全体になるはずです. それを確かめるのがこの問題の趣旨です.

以上です.

[*1] 2019/07/11 版, ver. 0.1.