数学演習 VII・VIII　7 月 11 日分解答[*1]

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp
`https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida/2019S78.html`

11　Fubini の定理とその応用

11.1　収束定理の応用: 微分と積分の交換

問題 11.1. 求めたい積分を $I(t) = \int f(x,t)\,dt$ と置く. $|f_t(x,t)| = |e^{-x^2} x \sin(tx)| \le xe^{-x^2}$ で右辺は可積分だから, 微分と積分の順序が交換できて,

$$I'(t) \;=\; -\int_0^\infty e^{-x^2} x \sin(tx)\,dx \;=\; \frac{1}{2}\int_0^\infty (e^{-x^2})' \sin(tx)\,dx \;=\; -\frac{t}{2}\int_0^\infty e^{-x^2} \cos(tx)\,dx \;=\; -\frac{t}{2} I(t).$$

よって

$$I(t) \;=\; I(0) e^{-t^2/4} \;=\; \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-t^2/4}.$$

問題 11.2. $t > 0$ とする. $\int_0^\infty e^{-y^2}\,dy = \sqrt{\pi}/2$ で $y = \sqrt{t}x$ と変換して

$$\int_0^\infty e^{-tx^2}\,dx \;=\; \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{t}}. \tag{11.1}$$

左辺の被積分関数を t で n 回微分したものについて, $1/2 < t$ の範囲で

$$\left| (-x^2)^n e^{-tx^2} \right| \;\le\; e^{-x^2/2} x^{2n}, \quad \int_0^\infty e^{-x^2/2} x^{2n}\,dx \;<\; \infty.$$

よって微分と積分の順序の交換定理を逐次適用できて, (11.1) は $1/2 < t$ の範囲で何回でも微分できて

$$\int_0^\infty e^{-tx^2} x^{2n}\,dx \;=\; \frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}} \sqrt{\pi}\, t^{-1/2-n}.$$

$t = 1$ として, 求めたい値は $\sqrt{\pi}(2n-1)!!/2^{n+1}$.

問題 11.3. $t \in \mathbb{R}_{>0}$ として $f(x,t) := e^{-tx} \sin x$ を考える. Riemann 積分の結果 (部分積分を 2 回する) から

$$\int_0^\infty f(x,t)\,dx \;=\; \frac{1}{1+t^2} \;<\; \infty.$$

$\partial_t f(t,x) = -xe^{-tx} \sin x$ について,

$$\varphi(x) \;:=\; \begin{cases} x \sin x & (0 < x < 1) \\ x/(t^3 x^3/6) \;=\; 6/(t^3 x^2) & (x \ge 1) \end{cases}$$

とすれば $|\partial_t f(t,x)| \le \varphi(x)$ かつ $\varphi(x)$ は $(0,\infty)$ で可積分. よって微分と積分の順序が交換できて

$$\int_0^\infty (-xe^{-tx} \sin x)\,dx \;=\; \int_0^\infty \big(\partial_t f(x,t)\big)\,dx \;=\; \partial_t \int_0^\infty f(x,t)\,dx \;=\; -\frac{2t}{(1+t^2)^2}.$$

[*1] 2019/07/11 版, ver. 0.2.

同様に $\partial_t^2 f(t,x) = x^2 e^{-tx}\sin x$ について,

$$\psi(x) \;:=\; \begin{cases} x^2 \sin x & (0 < x < 1) \\ x^2/(t^4x^4/24) \;=\; 24/(t^4x^3) & (x \geq 1) \end{cases}$$

とすれば $|\partial_t^2 f(t,x)| \leq \psi(x)$ かつ $\psi(x)$ は $(0,\infty)$ で可積分. よって微分と積分の順序が交換できて

$$\int_0^\infty x^2 e^{-tx}\sin x\,dx \;=\; \partial_t \int_0^\infty \partial_t f(x,t)\,dx \;=\; \frac{8t^2}{(1+t^2)^3} - \frac{2}{(1+t^2)^2}.$$

求める値は $t=1$ として $1/2$.

問題 11.4. $e^{i\lambda x} = \sum_{n=0}^\infty (i\lambda x)^n/n!$ と Taylor 展開すると, 任意の $x \in \mathbb{R}$ で

$$\Big|\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!}(i\lambda x)^n e^{-tx^2}\Big| \;\leq\; \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!}\,|\lambda x|^n e^{-tx^2} \;\leq\; e^{\lambda x - tx^2}$$

と評価できる. $e^{\lambda x - tx^2}$ は $\mathbb{R}$ 上可積分なので, 優収束定理が適用できて項別積分できることが分かる. 各項の積分は, n が奇数なら 0, 偶数なら問題 11.2 の形になる. よって

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^\infty e^{i\lambda x - tx^2}\,dx \;&=\; \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(2n)!}(-\lambda^2)^n \int_{-\infty}^\infty x^{2n} e^{-tx^2}\,dx \;=\; \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(2n)!}(-\lambda^2)^n \sqrt{\frac{\pi}{t}}\,\frac{(2n-1)!!}{2^n}t^{-n} \\ &=\; \sqrt{\frac{\pi}{t}} \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!}\left(\frac{-\lambda^2}{4t}\right)^n \;=\; \sqrt{\frac{\pi}{t}}\,e^{-\lambda^2/4t}.\end{aligned}$$

11.2　重積分と Fubini の定理

問題 11.5. 　(1) $D_R := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq R^2\}$ とする. $\chi_{D_R}(x,y)e^{-x^2-y^2} \geq 0$ は $R \to \infty$ で単調増加に $e^{-x^2-y^2}$ に収束する. 従って単調収束定理が使えて

$$\begin{aligned}\lim_{R\to\infty} \iint_{D_R} e^{-x^2-y^2}\,dxdy \;&=\; \lim_{R\to\infty} \iint_{\mathbb{R}^2} \chi_{D_R}(x,y)e^{-x^2-y^2}\,dxdy \\ &=\; \iint_{\mathbb{R}^2} \lim_{R\to\infty} \chi_{D_R}(x,y)e^{-x^2-y^2}\,dxdy \;=\; \iint_{\mathbb{R}^2} \chi_{D_R}(x,y)e^{-x^2-y^2}\,dxdy.\end{aligned}$$

一方, 極座標変換で

$$\iint_{D_R} e^{-x^2-y^2}\,dxdy \;=\; \int_0^{2\pi}\int_0^R e^{-r^2} r\,drd\theta \;=\; -\pi\Big[e^{-r^2}\Big]_0^R \;=\; \pi\big(1-e^{-R^2}\big).$$

これで $R \to \infty$ として,

$$\lim_{R\to\infty} \iint_{D_R} e^{-x^2-y^2}\,dxdy \;=\; \pi.$$

(2) $e^{-x^2-y^2} \geq 0$ なので正値関数に関する Fubini の定理が適用できて

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\,dxdy \;=\; \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\,dx \cdot \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2}\,dy \;=\; \Big(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\,dx\Big)^2.$$

(3) (1) と (2) より $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

問題 11.6. $(x,y)\in[0,1]\times[a,b]$ において $x^y=e^{y\log x}\geq 0$ なので, 正値関数に関する Fubini の定理が使えて

$$\iint_{[0,1]\times[a,b]} x^y\,dxdy \;=\; \int_0^1\int_a^b x^y\,dydx \;=\; \int_a^b\int_0^1 x^y\,dxdy.$$

中辺について

$$\int_0^1\int_a^b x^y\,dydx \;=\; \int_0^1\int_a^b e^{y\log x}\,dydx \;=\; \int_0^1\Big[\frac{1}{\log x}e^{y\log x}\Big]_a^b dx \;=\; \int_0^1 \frac{x^b-x^a}{\log x}\,dx.$$

右辺について

$$\int_a^b\int_0^1 x^y\,dxdy \;=\; \int_a^b\Big[\frac{x^{y+1}}{y+1}\Big]_0^1 dy \;=\; \int_a^b\frac{1}{y+1}\,dy \;=\; \log\frac{1+b}{1+a}.$$

但し $x^{y+1}|_{x=0}=\lim_{x\to+0}x^{y+1}=\lim_{x\to+0}e^{(y+1)\log x}=0$ と計算した.

問題 11.7. (1) $\chi_E(x,t)\geq 0$ なので正値関数に関する Fubini の定理が適用できて

$$\int_{\mathbb{R}^2}\chi_E(x,t)\,dxdt \;=\; \int_{\mathbb{R}}\Big(\int_{\mathbb{R}}\chi_E(x,t)\,dt\Big)dx \;=\; \int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx \;<\; \infty.$$

(2) $t^{p-1}\chi_E(x,t)\geq 0$ なので Fubini の定理が適用できて

$$\begin{aligned}\int_0^\infty t^{p-1}\mu(E_t)\,dt \;&=\; \int_0^\infty t^{p-1}\Big(\int_{\mathbb{R}}\chi_E(x,t)\,dx\Big)\,dt \;=\; \int_{\mathbb{R}}\Big(\int_0^\infty t^{p-1}\chi_E(x,t)\,dt\Big)dx\\ &=\; \int_{\mathbb{R}}\Big(\int_0^{f(x)} t^{p-1}\,dt\Big)dx \;=\; \int_{\mathbb{R}}\Big[\frac{1}{p}t^p\Big]_0^{f(x)}dx \;=\; \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}} f(x)^p\,dx.\end{aligned}$$

問題 11.8. $|\cos(xy/n)e^{-xy^2}|\leq e^{-xy^2}$ と評価できる. まず e^{-xy^2} が可積分であることを示したい. $0\leq e^{-xy^2}$ だから正値関数に関する Fubini の定理が適用できて

$$\int_E e^{-xy^2}\,dxdy \;=\; \int_1^\infty\Big(\int_0^\infty e^{-xy^2}\,dx\Big)dy \;=\; \int_1^\infty\frac{dy}{y^2}\,dy \;=\; 1 \;<\; \infty.$$

よって e^{-xy^2} は可積分. また $n\to\infty$ で $\cos(xy/n)e^{-xy^2}\to e^{-xy^2}$ だから, 優収束定理が使えて

$$\lim_{n\to\infty}\int_E\cos(xy/n)e^{-xy^2}\,dxdy \;=\; \int_E\lim_{n\to\infty}\cos(xy/n)e^{-xy^2}\,dxdy \;=\; \int_E e^{-xy^2}\,dxdy \;=\; 1.$$

11.3　Fubini の定理の応用: 畳み込み積

問題 11.9.

$$\int_{\mathbb{R}}|h(x)|\,dx \;\leq\; \int_{\mathbb{R}}\Big(\int_{\mathbb{R}}|f(x-y)g(y)|\,dy\Big)\,dx$$

$|f(x-y)g(y)|>0$ なので正値関数に関する Fubini の定理より

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}}\Big(\int_{\mathbb{R}}|f(x-y)g(y)|\,dy\Big)\,dx \;&=\; \int_{\mathbb{R}}\Big(\int_{\mathbb{R}}|f(x-y)g(y)|\,dx\Big)\,dy\\ &=\; \int_{\mathbb{R}}|g(y)|\,\Big(\int_{\mathbb{R}}|f(x-y)|\,dx\Big)\,dy \;=\; \Big(\int_{\mathbb{R}}|g(y)|\,dy\Big)\cdot\Big(\int_{\mathbb{R}}|f(x)|\,dx\Big).\end{aligned}$$

最後の式は仮定より有限. よって $h(x)$ は可積分.

問題 11.10. Lebesgue 積分の平行移動不変性 $\int_{\mathbb{R}^d} f(x-x_0)\,dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,dx$ と鏡映不変性 $\int_{\mathbb{R}^d} f(-x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,dx$ から $\int_{\mathbb{R}^d} f(x_0-x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,dx$. よって

$$(f*g)(x) \;=\; \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)\,dy \;=\; \int_{\mathbb{R}^d} f(z)g(x-z)\,dz \;=\; (g*f)(x).$$

問題 11.11. 正値関数に関する Fubini の定理が適用できて

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} (f*g)(x)\,dx \;&=\; \int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)\,dy\Big)\,dx \\ &=\; \int_{\mathbb{R}} g(y)\Big(\int_{\mathbb{R}} f(x-y)\,dx\Big)\,dy \;=\; \Big(\int_{\mathbb{R}} g(y)\,dy\Big)\cdot\Big(\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx\Big).\end{aligned}$$

問題 11.12. (1) $|f(x)e^{-2\pi i x\cdot\xi}| = |f(x)|$ なので各 ξ について $\widehat{f}(\xi)$ を定義する積分は収束する．また

$$\sup_{\xi\in\mathbb{R}^d} |\widehat{f}(\xi)| \;\le\; \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|\,dx \;<\; \infty$$

より有界であることも分かる．連続であることは優収束定理から従う．

(2) $\widehat{f*g}(\xi)$ を定義する積分の被積分関数について，$|(f*g)(x)e^{-2\pi i x\cdot\xi}| \le |f(x-y)||h(x)|$ なので Fubini の定理が使えて，

$$\begin{aligned}\widehat{f*g}(\xi) \;&=\; \int_{\mathbb{R}^d} (f*g)(x)e^{-2\pi i x\cdot\xi}\,dx \;=\; \int_{\mathbb{R}^d}\Big(\int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)\,dy\Big)e^{-2\pi i x\cdot\xi}\,dx \\ &=\; \int_{\mathbb{R}^d}\Big(\int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)e^{-2\pi i(x-y)\cdot\xi} g(y)e^{-2\pi i y\cdot\xi}\,dy\Big)\,dx \\ &=\; \int_{\mathbb{R}^d} g(y)e^{-2\pi i y\cdot\xi}\Big(\int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)e^{-2\pi i(x-y)\cdot\xi}\,dx\Big)\,dy \\ &=\; \int_{\mathbb{R}^d} g(y)e^{-2\pi i y\cdot\xi}\widehat{f}(\xi)\,dy \;=\; \widehat{f}(\xi)\,\widehat{g}(\xi).\end{aligned}$$

以上です．