数学演習 VII · VIII　7 月 11 日分問題[*1]

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp
https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida/2019S78.html

11　Fubini の定理とその応用

各問題の冒頭にある $*$ の数は, その問題の難易度の目安を表しています.

今回、測度といったら $\mathbb{R}^d$ 上の Lebesgue 測度のことを意味するものとします. また積分は Lebesgue 積分の意味とします.

11.1　収束定理の応用: 微分と積分の交換

定義. $E \subset \mathbb{R}$ を可測集合, $f = f(x,t)$ を $E \times (a,b)$ 上の関数であって

- t を固定したとき x について可積分
- x を固定したとき t について微分可能であり, かつ, $E \times (a,b)$ 上で
$$\left| \frac{\partial f}{\partial t}(x,t) \right| \le \varphi(x)$$
となる t **に依存しない**可積分関数 $\varphi(x)$ が存在する

の 2 条件を満たすものとする. このとき

$$\frac{d}{dt} \int_E f(x,t)\, dx = \int_E \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\, dx.$$

問題 11.1 ($*$)**.** $t \in \mathbb{R}$ とする. $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$ (問題 11.5 を参照) を用いて, 次の積分を求めよ.

$$\int_0^\infty e^{-x^2} \cos(tx)\, dx.$$

問題 11.2 ($*$)**.** $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$ (問題 11.5 を参照) を用いて, 次の積分を求めよ.

$$\int_0^\infty e^{-x^2} x^{2n}\, dx.$$

問題 11.3 ($*$)**.** 次の積分を求めよ.

$$\int_0^\infty x^2 e^{-x} \sin x\, dx.$$

問題 11.4 ($*$)**.** $t, \lambda \in \mathbb{R}$, $t > 0$ とする. 次の積分を求めよ.

$$\int_{-\infty}^\infty e^{i\lambda x - tx^2}\, dx.$$

[*1] 2019/07/11 版, ver. 0.2.

11.2　重積分と Fubini の定理

定理. A と B を $\mathbb{R}$ の可測集合とし, $f(x,y)$ を $A\times B$ 上の可測関数であるとする. 次の二条件のうちのどちらかが成立すると仮定する.

- $\int_A \left(\int_B |f(x,y)|\,dy\right)\,dx < \infty$ かつ $\int_B \left(\int_A |f(x,y)|\,dx\right)\,dy < \infty$.
- 任意の $(x,y)\in A\times B$ について $f(x,y)\geq 0$.

このとき積分の順序交換ができて,

$$\int_A\Big(\int_B f(x,y)\,dy\Big)\,dx = \int_B\Big(\int_A f(x,y)\,dx\Big)\,dy = \int_{A\times B} f(x,y)\,dxdy.$$

問題 11.5 (∗)**.** $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}dx$ の値を以下の方法で求めよ.

(1) 次の等式を示し, 右辺の値を計算せよ.

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\,dxdy \;=\; \lim_{R\to\infty}\iint_{x^2+y^2\leq R^2} e^{-x^2-y^2}\,dxdy.$$

(2) 次の等式を示せ.

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\,dxdy \;=\; \Big(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\,dx\Big)^2.$$

(3) 次の等式を示せ.

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\,dx \;=\; \sqrt{\pi}.$$

問題 11.6 (∗)**.** $0<a<b$ とする. 次の等式を示せ.

$$\int_0^1 \frac{x^b-x^a}{\log x}\,dx \;=\; \log\frac{1+b}{1+a}.$$

問題 11.7 (∗∗)**.** $f(x)>0$ は $\mathbb{R}$ 上の正値可積分関数とする. $\mathbb{R}^2$ の部分集合 $E:=\{(x,t)\in\mathbb{R}^2 \mid 0<t<f(x)\}$ が可測集合であることは認めて, 以下の問いに答えよ.

(1) 関数 $\chi_E(x,t)$ を

$$\chi_E(x,t) \;:=\; \begin{cases} 1 & ((x,t)\in E) \\ 0 & ((x,t)\notin E)\end{cases}$$

で定める. 次を示せ.

$$\int_{\mathbb{R}^2} \chi_E(x,t)\,dxdt \;<\; \infty.$$

(2) $1\leq p<+\infty$ に対して

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)^p\,dx \;=\; p\int_{\mathbb{R}_{>0}} t^{p-1}\mu(E_t)\,dt$$

を示せ. ただし $E_t:=\{x\in\mathbb{R} \mid f(x)>t\}$.

問題 11.8 (∗)**.** $E:=[0,\infty)\times[1,\infty)$ とする. 次の極限を計算せよ.

$$\lim_{n\to\infty}\int_E \cos(xy/n)e^{-xy^2}\,dxdy.$$

11.3 Fubini の定理の応用: 畳み込み積

問題 11.9 (* **畳み込み積**)**.** $f(x)$ と $g(x)$ が $\mathbb{R}^d$ 上の可積分関数であるとき,

$$h(x) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)\,dy$$

も $\mathbb{R}$ 上可積分であることを示せ.

定義. 問題 11.9 の可積分関数 $h(x)$ を $f(x)$ と $g(x)$ の**畳み込み積** (convolution product) といい, $(f*g)(x)$ と書く.

問題 11.10 (*)**.** 問題 11.9 の畳み込み積 $*$ が可換であることを示せ. つまり任意の可積分関数 f, g に対し, $f*g = g*f$ となることを示せ.

問題 11.11 (*)**.** $f, g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ を正値可積分関数とする. 次の等式を示せ.

$$\int_{\mathbb{R}^d} (f*g)(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,dx \cdot \int_{\mathbb{R}^d} g(y)\,dy$$

問題 11.12 (* **畳み込み積と Fourier 変換**)**.** $\mathbb{R}^d$ 上の可積分関数 f の Fourier 変換は

$$\widehat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-2\pi i x\cdot\xi}\,dx$$

で定義される.

(1) $\widehat{f}(\xi)$ は有界かつ連続な $\mathbb{R}^d$ 上の関数であることを示せ.

(2) f, g が $\mathbb{R}^d$ 上の可積分関数なら次の等式が成り立つことを示せ.

$$\widehat{f*g}(\xi) = \widehat{f}(\xi)\,\widehat{g}(\xi).$$

11.4 レポート問題

レポート問題 11.1 (**)**.** μ を $\mathbb{R}^n$ の Lebesgue 測度とする. 実数成分の n 次正則行列 $\sigma \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ を $\mathbb{R}^n$ 上の線形変換とみなす.

(1) $E \subset \mathbb{R}^n$ が Lebesgue 可測集合ならば σE も Lebesgue 可測集合であることを示せ.

(2) $E \subset \mathbb{R}^n$ が Lebesgue 可測集合ならば

$$\mu(\sigma E) = |\det(\sigma)|\,\mu(E)$$

となることを示せ.

連絡事項

レポートの**締め切りは 7/25(木)** (この演習の最終回) とします.

以上です.