

数学演習 VII・VIII 7月4日分小テスト解答*1

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)

yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp

<https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida/2019S78.html>

問題. 写像

$$p(u, v) = ((5 + 2 \cos u) \cos v, (5 + 2 \cos u) \sin v, 2 \sin u), \quad u, v \in [0, 2\pi]$$

でパラメータ表示された曲面 S を考える.

- (1) S の Gauss 曲率と平均曲率を計算せよ. (2) S の面積を計算せよ. (3) S の概形を描け.

解答. 直接計算で以下が得られる.

$$\begin{aligned} p_u &= (-2 \sin u \cos v, -2 \sin u \sin v, 2 \cos u), & p_v &= (5 + 2 \cos u) \cdot (-\sin v, \cos v, 0), \\ p_u \times p_v &= -2(5 + 2 \cos u) \cdot (\cos u \cos v, \cos u \sin v, \sin u), & |p_u \times p_v| &= 2(5 + 2 \cos u), \\ n &= -(\cos u \cos v, \cos u \sin v, \sin u), \\ p_{uu} &= -2(\cos u \cos v, \cos u \sin v, \sin u), & p_{uv} &= 2 \sin u \cdot (\sin v, -\cos v, 0), \\ p_{vv} &= -(5 + 2 \cos u) \cdot (\cos v, \sin v, 0), \end{aligned}$$

- (1) 第一, 第二基本行列は

$$I = \begin{pmatrix} p_u \cdot p_u & p_u \cdot p_v \\ p_v \cdot p_u & p_v \cdot p_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & (5 + 2 \cos u)^2 \end{pmatrix}, \quad II = \begin{pmatrix} p_{uu} \cdot n & p_{uv} \cdot n \\ p_{vu} \cdot n & p_{vv} \cdot n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & (5 + 2 \cos u) \cos u \end{pmatrix}.$$

よって

$$I^{-1}II = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & \cos u / (5 + 2 \cos u) \end{pmatrix}, \quad \text{Gauss 曲率 } K = \frac{\cos u}{2(5 + 2 \cos u)}, \quad \text{平均曲率 } H = \frac{5 + 4 \cos u}{4(5 + 2 \cos u)}.$$

- (2)

$$A(S) = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |p_u \times p_v| \, dudv = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} 2(5 + 2 \cos u) \, dudv = 40\pi^2.$$

- (3)
- S
- は 2 次元トーラス.

コメント. $2 + 2 + 1$ 点で採点しました. 平均点は 2.5 点でした.

(1) で $p_u = ((5 - 2 \sin u) \cos v, (5 - 2 \sin u) \sin v, 2 \cos u)$ となってしまった方が何人かいました. 注意して微分しましょう.

以上です.

*1 2019/07/04 版, ver. 0.1.