

数学演習 VII・VIII 7月4日分問題*¹

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)

yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp

<https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida/2019S78.html>

10 群論 3 (群作用, Sylow の定理)

各問題の冒頭にある * の数は, その問題の難易度の目安を表しています.

10.1 群作用と軌道分解

定義. 群 G と集合 X に対して, 写像*²

$$G \times X \longrightarrow X, \quad (g, x) \longmapsto g \cdot x$$

が与えられていて, 任意の $g_1, g_2 \in G$ と任意の $x \in X$ に対して

$$g_2 \cdot (g_1 \cdot x) = (g_2 g_1) \cdot x, \quad e \cdot x = x$$

が成り立つとき, 群 G は集合 X に左から作用する (G acts on X from left), あるいは単に G は X に作用する, という. また X を G 集合 (G -set) という. そしてこの状況を $G \curvearrowright X$ と書いたりする.

問題 10.1 (*). G を群, X を G 集合とする. 各 $x \in X$ に対して $G_x := \{g \in G \mid g \cdot x = x\}$ と定義する.

- (1) G_x は G の部分群になることを証明せよ.
- (2) 任意の $x, y \in X$ と $g \in G$ に対して, $y = g \cdot x$ ならば $G_y = g G_x g^{-1}$ となることを証明せよ.

定義. 群 G が集合 X に作用しているとする. また $x \in X$ とする.

- (1) 問題 10.1 の部分群

$$G_x := \{g \in G \mid g \cdot x = x\}$$

を x の固定部分群 (stabilizer subgroup) とよぶ.

- (2)
- X
- の部分集合

$$O_G(x) := \{g \cdot x \mid g \in G\}$$

を x の G 軌道 (G -orbit), または単に x の軌道, と呼ぶ.問題 10.2 (*). (1) n 次対称群 S_n は集合 $X = \{1, \dots, n\}$ に置換で作用することを説明せよ.

- (2) 各
- $i \in X$
- の
- S_n
- 軌道を求めよ.

問題 10.3 (*). G を群とする.

- (1) G の積 $m : G \times G \rightarrow G, (g, h) \mapsto gh$ によって, G が G 自身に作用することを確かめよ.
- (2) 上の (1) の作用における各 $g \in G$ の G 軌道を求めよ.

*¹ 2019/03/15 版, ver. 0.1.*² ここでは $g \cdot x$ とピリオドで書きましたが, 単に gx と並べて書いたり, 積のように $g \cdot x$ と中点で書いたりすることもあります.

問題 10.4 (**). 実数成分の n 次直交行列全体のなす集合 $O_n(\mathbb{R})$ を考える. すなわち

$$O_n(\mathbb{R}) := \{A \in GL_n(\mathbb{R}) \mid A \cdot {}^t A = I_n\}.$$

- (1) $O_n(\mathbb{R})$ は行列の乗法に関して群であることを確認せよ. この群を n 次実直交群と呼ぶ.
- (2) 群 $O_n(\mathbb{R})$ は \mathbb{R}^n に $A \cdot x = Ax$ (行列とベクトルの乗法) でもって作用することを確認せよ.
- (3) $n = 2$ とする. $x = {}^t(1, 0) \in \mathbb{R}^2$ の軌道 $O_{O_2(\mathbb{R})}(x)$ を求めよ.
- (4) $n = 3$ とする. $x = {}^t(1, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$ の軌道 $O_{O_3(\mathbb{R})}(x)$ を求めよ.

問題 10.5 (*). G を群とし, X を G 集合とする. $x \in X$ の固定部分群 G_x を考える. 写像 $\varphi_x : G/G_x \rightarrow O_G(x)$ を次で定める.

$$\varphi_x : G/G_x \longrightarrow O_G(x), \quad gG_x \longmapsto g.x.$$

- (1) 写像 φ_x が well-defined であることを証明せよ.
- (2) φ_x は全単射であることを証明せよ.
- (3) G が有限群なら $|G| = |G_x| \cdot |O_G(x)|$ となることを証明せよ.

問題 10.6 (**). G を群とし, X を G 集合とする.

- (1) $x, y \in X$ に対して, $O_G(x) \cap O_G(y) \neq \emptyset$ ならば $O_G(x) = O_G(y)$ となることを証明せよ.
- (2) 部分集合 $\{x_i \mid i \in I\} \subset X$ が存在して $X = \sqcup_{i \in I} O_G(x_i)$ と書けることを示せ. さらに, もし G が有限群で X が有限な G 集合なら $|X| = \sum_{i \in I} [G : G_{x_i}]$ となることを証明せよ.

定義. 問題 10.6 (2) の分解

$$X = \bigsqcup_{i \in I} O_G(x_i)$$

を G 集合 X の軌道分解 (orbit decomposition) と呼ぶ. また G と X が有限集合のときの問題 10.6 (2) の式

$$|X| = \sum_{i \in I} [G : G_{x_i}] \tag{10.1}$$

を軌道分解等式とよぶ.

10.2 類等式

定義 10.1. G を群とする. 写像 $G \times G \rightarrow G$ を

$$(g, u) \longmapsto g.u := gug^{-1}$$

と定めると, この写像によって G は G 自身に作用する. この作用を G の共役作用 (conjugation) または随伴作用 (adjoint action) と呼ぶ. また共役作用による $u \in G$ の軌道 $O_G(u) = \{gug^{-1} \mid g \in G\}$ を u の共役類 (conjugacy class) または随伴軌道 (adjoint orbit) という. $O_G(u)$ は u と共役 (conjugate) な元の集合に他ならない.

問題 10.7 (*). 定義 10.1 で G の G 自身への作用が定まっていることを確認せよ.

定義. 有限群 G の共役作用による軌道分解等式 (10.1) のことを類等式 (class equation) と呼ぶ. また共役作用に関する固定部分群 $G_x = \{g \in G \mid gxg^{-1} = x\}$ は中心化群 (centralizer) と呼ばれ, $C_G(x)$ と書かれる.

つまり、有限群 G の類等式は以下のように書ける。

$$|G| = \sum_{i \in I} [G : C_G(x_i)].$$

ここで $\{x_i \mid i \in I\} \subset G$ は共役類の完全代表系、つまり各共役類から 1 つずつ代表元をとってできる G の部分集合である。

問題 10.8 (*). 群 G の自分自身への共役作用を考える。次の 2 つの主張を示せ。

- (1) $O_G(e) = \{e\}$.
- (2) G の中心 $Z(G) = \{u \in G \mid \forall g \in G, ug = gu\}$ の任意の元 $u \in Z(G)$ に対して $O_G(u) = \{u\}$.

問題 10.9 (*). 対称群 S_4 の自分自身への共役作用を考える。

- (1) 軌道分解を与えよ。
- (2) 類等式を確かめよ。

10.3 p 部分群と p -Sylow 部分群

この副節では G は有限群であるとする。

定義. p を素数とする。

- (1) 位数 $|G|$ が p の幂である群 G , つまり自然数 $s \geq 1$ があって $|G| = p^s$ となる G を p 群という。
- (2) p 群である部分群 $H \subset G$ を G の p 部分群という。
- (3) $p^s \parallel |G|$ となる最大幂 p^s に対して、部分群 $H \subset G$ で $|H| = p^s$ となるものを p -Sylow 部分群という。

問題 10.10 (*). p 群 G が有限集合 M に作用しているとき、固定点全体の集合 $M^G = \{u \in M \mid G.u = u\}$ に対して $|M| \equiv |M^G| \pmod{p}$ を示せ。

問題 10.11 (*). p 群 G に対して集合 M を $M := G \setminus \{e\}$ と定める。写像 $G \times M \rightarrow M$ を $(g, u) \mapsto g.u := gug^{-1}$ と定義すると、 G は M に作用していることを示せ。この作用を用いて、 G の中心が自明でない、即ち $Z(G) \neq \{e\}$ となることを示せ。

問題 10.12 (*). 位数が p^2 (p は素数) の群は可換群であることを示せ。

注意. 一般に群 G の部分群 H は Lagrange の定理によって $|G| = [G : H] \cdot |H|$, すなわち H の位数は G の位数の約数になる。しかし、逆に $|G|$ の約数 n を任意にとり、位数が n になるような部分群 H が存在するとは限らない。この問題に対して、Sylow の定理は位数の情報だけから部分群の存在を教えてくれる。

定理 (Sylow の定理). (1) G の p -Sylow 部分群は存在する。

- (2) p -Sylow 部分群の個数 $k(p)$ は $k(p) \equiv 1 \pmod{p}$ かつ $k(p) \mid |G|$ を満たす。
- (3) 任意の p 部分群 $H \subset G$ に対して、ある $g \in G$ が存在して gHg^{-1} は p -Sylow 部分群に含まれる。特に p -Sylow 部分群はすべて共役である。

系. p -Sylow 部分群が 1 つしかない場合、それは正規部分群になる。

問題 10.13 (*). p と q は素数で $p > q$ だとする. 群 G の位数が pq ならば, G の p -Sylow 部分群は正規部分群となることを示せ.

問題 10.14 (*). 問題 10.13 でさらに $p \not\equiv 1 \pmod{q}$ なら q -Sylow 部分群も正規部分群となり, G は巡回群になることを示せ. 但し, 必要なら問題 10.17, 10.18 の結果を使っても良い.

注意. 問題 10.14 より, 位数 15, 33, 35, 51 の群は巡回群である.

問題 10.15 (*). 位数 99 の群は可換群になることを示せ. 必要なら問題 10.17, 10.18 の結果を用いて良い.

問題 10.16 (*). 有限群 G とその正規部分群 N を考える. 素数 p は G の位数の約数であり, N の指数は p と互いに素であると仮定する. このとき N はすべての p -Sylow 部分群を含むことを証明せよ.

問題 10.17 (*). G を群, $N_1, N_2 \subset G$ を正規部分群とし, $N_1 N_2 = G$ かつ $N_1 \cap N_2 = \{e\}$ だとする. この時, 群として $G \simeq N_1 \times N_2$ である.

問題 10.18 (*). G を (有限群とは限らない) 群とし, H と K を G の正規部分群とする. このとき $HK := \{hk \mid h \in H, k \in K\}$ は G の部分群であることを証明せよ.

10.4 レポート問題

レポートの締め切りは (今学期末までという自明なものを除いて) 特に設けません.

レポート問題 10.1 (*). 特殊線形群 $SL_n(\mathbb{C})$, つまり行列式が 1 である複素成分の n 次行列全体のなす群, の共役類を全て求めよ.

レポート問題 10.2 (*). n 次対称群 S_n の共役類を全て求めよ. また各共役類の濃度も求めよ.

以上です.