

数学演習 VII・VIII 6月20日分小テスト解答*1

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)

yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp

<https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida/2019S78.html>

問題. 以下の極限を求めよ. 但し積分は Lebesgue 積分の意味とする.

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-n} x^{-1/n} dx. \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{n \sin x}{1 + n^2 x^2} dx.$$

解答. (1) $f_n(x) := (1 + x/n)^n$ とすると, $x \geq 0$ なら $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$. よって $n \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ で

$$f_n(x) \geq \begin{cases} 1 & (0 \leq x \leq 1) \\ f_2(x) = (1 + x/2)^2 \geq x^2/4 & (1 \leq x) \end{cases}, \quad x^{1/n} \geq \begin{cases} \sqrt{x} & (0 \leq x \leq 1) \\ 1 & (1 \leq x) \end{cases}$$

となる. 従って

$$F(x) := \begin{cases} 1/\sqrt{x} & (0 < x \leq 1) \\ 4/x^2 & (1 \leq x) \end{cases}$$

とすれば, $F(x)$ は $(0, \infty)$ 上で可積分かつ $|(1 + x/n)^{-n} x^{-1/n}| \leq F(x)$. Lebesgue の収束定理 (優収束定理) より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-n} x^{-1/n} dx = \int_0^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-n} x^{-1/n}\right] dx = \int_0^{\infty} e^{-x} dx = 1.$$

(2) $y = nx$ と変数変換すれば

$$\int_0^1 \frac{n \sin x}{1 + n^2 x^2} dx = \int_0^n \frac{\sin(y/n)}{1 + y^2} dy = \int_0^{\infty} \frac{\sin(y/n)}{1 + y^2} \chi_{(0,n)}(y) dy.$$

但し $\chi_{(0,n)}$ は区間 $(0, n) \subset \mathbb{R}$ の特性関数. 任意の $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ について, 区間 $(0, \infty)$ 上で

$$\left| \frac{\sin(y/n)}{1 + y^2} \chi_{(0,n)}(y) \right| \leq \frac{1}{1 + y^2}$$

となることに注意する. 右辺の $(1 + y^2)^{-1}$ は $(0, \infty)$ 上で可積分なので, Lebesgue の収束定理 (優収束定理) より

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{n \sin x}{1 + n^2 x^2} dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \frac{\sin(y/n)}{1 + y^2} \chi_{(0,n)}(y) dy \\ &= \int_0^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sin(y/n)}{1 + y^2} \chi_{(0,n)}(y) \right) dy = \int_0^{\infty} 0 dy = 0. \end{aligned}$$

コメント. 2 + 3 点で採点しました. 平均点は 2.3 点でした.

(1) は単調収束定理が使えるのですが, 被積分関数が n に関して単調減少であることを証明するのは少し面倒なので, 解答のように優収束定理を使うほうが易しいです.

いくつかの答案では被積分関数が n について単調増加であるとしていましたが, 正しくは単調減少です.

以上です.

*1 2019/06/20 版, ver. 0.1.