数学演習 VII・VIII　6 月 20 日分補遺[*1]

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp
`https://math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida/2019S78.html`

付録 A　単体複体とホモロジー群

ここでは単体複体と多様体に関する解説をする.

圏と函手に関する基本的な概念を既知とする. 集合を対象とし集合の間の写像を射とする圏を Set と書く.

A.1　抽象的単体複体

この節の目的は抽象的単体複体の圏 Set_Δ (定義 A.1.3) を導入することである.

まず全順序集合の定義を思い出しておこう.

定義. 半順序集合 (partially ordered set, poset) とは集合 X とその上の半順序 $\le$ の組 $(X, \le)$ のことある.

全順序集合 (totally ordered set) または線形順序集合 (linearly ordered set) とは, 半順序集合 $(X, \le)$ であって任意の二元 $x, y \in X$ に対し $x \le y$ または $y \le x$ のどちらかが成立するもののことをいう.

有限な全順序集合とその間の順序を保つ写像のなす圏を考える. 正確には

定義 (組み合わせ的単体のなす圏)**.**
(1) $n \in \mathbb{N}$ に対し, $(n+1)$ 元集合 $\{0, 1, \ldots, n\}$ に順序 $0 < 1 < \cdots < n$ を入れて全順序集合とみなしたものを $[n]$ と書く.
(2) $n, m \in \mathbb{N}$ とする. 写像 $[m] \to [n]$ が順序を保つ写像であるとは, (1) の順序について $i \le j$ ならば $f(i) \le f(j)$ となることをいう.
(3) $[n]$ 達を対象とし, 順序を保つ写像を射とする圏を $\mathbf{\Delta}$ と書き, 組み合わせ的単体の圏 (the category of combinatorial simplices) と呼ぶ.

定義 A.1.1. $j = 0, 1, \ldots, n$ に対し, 順序を保つ写像 $p_j : [n-1] \to [n]$ および $q_j : [n+1] \to [n]$ を以下のように定める.

$$p_j(i) := \begin{cases} i & (i < j) \\ i+1 & (i \ge j) \end{cases}, \qquad q_j(i) := \begin{cases} i & (i \le j) \\ i-1 & (i > j) \end{cases}.$$

特に p_j や q_j は $\mathbf{\Delta}$ の射であることに注意する.

定義 (抽象的単体複体)**.** 圏 C に対し, 函手 $\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{C}$ のことを C の単体的対象 (simplicial object in C) と呼ぶ. 特に集合の圏 Set の単体的対象のことを**抽象的単体複体** (abstract simplicial complex) または抽象的単体集合 (abstract simplicial set) と呼ぶ.

抽象的単体複体 S は $\mathbf{\Delta}$ から Set への反変函手なので, 各 $n \in \mathbb{N}$ に対し集合 $S([n])$ が定まり, また順序を保つ写像 $p : [m] \to [n]$ に対して写像 $S(p) : S([n]) \to S([m])$ が定まる.

抽象的単体複体に関する用語や記号をまとめておく.

[*1] 2019/06/20 版, ver. 0.2.

定義 A.1.2. $S : \mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Set}$ を抽象的単体複体とする.

(1) $n \in \mathbb{N}$ に対し $S_n := S([n])$ と書く.

(2) S_0 の元を S の**頂点** (vertex) と呼び, S_1 の元を S の**辺** (edge) と呼ぶ.

(3) $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ と $j = 0, 1, \dots, n$ に対し面写像 (**face map**) $d_j : S_n \to S_{n-1}$ を $d_j := S(p_j)$ と定義する.

(4) $n \in \mathbb{N}$ と $j = 0, 1, \dots, n$ に対し退化写像 (**degeneracy map**) $s_j : S_n \to S_{n+1}$ を $s_j := S(q_j)$ と定義する.

圏 C から圏 D への函手とその間の自然変換のなす圏を函手圏 (functor category) と呼んだが, それを $\mathsf{Fun}(\mathsf{C}, \mathsf{D})$ と書く.

定義 A.1.3 (抽象的単体複体の圏)**.** 抽象的単体複体の圏 Set_Δ を

$$\mathsf{Set}_\Delta := \mathsf{Fun}(\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}, \mathsf{Set}).$$

で定義する. Set_Δ における射を単体写像 (**simplicial map**) と呼ぶ.

抽象的単体複体の代表的な例をあげよう.

定義 (抽象的 n 単体)**.** (1) 全順序集合 J に対し抽象的単体複体 $\Delta^J : \mathbf{\Delta} \to \mathsf{Set}$ を

$$\begin{aligned} \Delta^J([n]) &:= \mathrm{Hom}_{\mathsf{LinOrd}}([n], J), \\ \Delta^J(p : [m] \to [n]) &:= \big(- \circ p : \mathrm{Hom}_{\mathsf{LinOrd}}([n], J) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathsf{LinOrd}}([m], J)\big) \end{aligned}$$

で定めることができる. 但し $\mathrm{Hom}_{\mathsf{LinOrd}}(-, -)$ は全順序集合の間の順序を保つ写像全体のなす集合を表す. また $- \circ p$ は p との合成を表す.

(2) $n \in \mathbb{N}$ に対し $\Delta^n := \Delta^{[n]}$ と略記し, **抽象的 n 単体**と呼ぶ.

抽象的 n 単体 Δ^n は, Euclid 空間内の n 単体の組み合わせ的な構造を抽象化したものと思える. 例えば頂点の集合 $(\Delta^n)_0$ と辺の集合 $(\Delta^n)_1$ はそれぞれ次のようになる.

$$\begin{aligned} (\Delta^n)_0 &= \Delta^n([0]) = \mathrm{Hom}_{\mathsf{LinOrd}}([0], [n]) = \{0, \dots, n\}, \\ (\Delta^n)_1 &= \Delta^n([1]) = \mathrm{Hom}_{\mathsf{LinOrd}}([1], [n]) = \{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \mid 0 \le i \le j \le n\}. \end{aligned}$$

問題 A.1.1. 集合 S の濃度を $\#S$ と書く. このとき $\#(\Delta^n)_m = \binom{n+m+1}{m+1}$ となることを示せ.

定義. $n \in \mathbb{N}$ と $j = 0, 1, \dots, n$ に対し抽象的単体複体 $\Lambda^n_j : \mathbf{\Delta} \to \mathsf{Set}$ を

$$\begin{aligned} (\Lambda^n_j)_m &:= \{p : [m] \to [n] \mid \text{順序を保つ集合},\ \{j\} \cup p([m]) \neq [n]\}, \\ (\Lambda^n_j)(q : [l] \to [m]) &:= \big(- \circ q : (\Lambda^n_j)_m \longrightarrow (\Lambda^n_j)_l\big) \end{aligned}$$

と定義し, Δ^n の **j-th horn** と呼ぶ.

問題 A.1.2. 上記の $(\Lambda^n_j)(q : [l] \to [m])$ が well-defined であることを確認せよ. また函手として $\Lambda^n_j \subset \Delta^n$ とみなせることを示せ.

$(\Lambda^n_j)_m$ を具体的に調べてみると, $m \le n-2$ なら $(\Lambda^n_j)_m = (\Delta^n)_m$. $m \ge n-1$ なら

$$\begin{aligned} (\Lambda^n_j)_m &= \{p : [m] \to [n] \mid \text{順序を保つ集合},\ \{j\} \cup p([m]) \neq [n]\} \\ &= \{p \in (\Delta^n)_m \mid \#p([m]) \le n-2\} \sqcup \{p \in (\Delta^n)_m \mid \#p([m]) = n-1,\ j \notin p([m])\} \end{aligned}$$

これは Euclid 空間内の n 単体から内部と頂点 j の対面を除いたものに相当する.

A.2　幾何学的実現

この節では次の随伴対 (adjoint pair) を説明する.

$$|\cdot| : \mathsf{Set}_\Delta \rightleftarrows \mathsf{CGH} : \mathrm{Sing}\,.$$

但し CGH はコンパクト生成 Hausdorff 位相空間[*2] のなす圏 (定義 A.2.2).

A.2.1

まず函手 $|\cdot| : \mathsf{Set}_\Delta \longrightarrow \mathsf{CGH}$ の構成から説明する. $S \in \mathsf{Set}_\Delta$ を抽象的単体複体とする. 頂点集合 S_0 は有限とは限らないことに注意しておく. 頂点集合 S_0 から閉区間 $[0,1] \subset \mathbb{R}$ への写像の集合を $[0,1]^{S_0}$ と書く. 部分集合 $|S| \subset [0,1]^{S_0}$ を

$$|S| := \left\{ t : S_0 \to [0,1] \mid \textstyle\sum_{s \in S_0} t_s = 1 \right\}$$

で定義する. 但し和 $\sum_{s \in S_0}$ は有限和を意味する.

集合 $[0,1]^{S_0}$ は Set における余極限 (colimit) [*3] を使って

$$[0,1]^{S_0} = \varinjlim_{A \subset S_0,\ \text{有限集合}} [0,1]^A$$

と書ける. 各 $[0,1]^A$ には Euclid 位相 (の積位相) が入るから. それらの誘導位相[*4] が $[0,1]^{S_0}$ に定まる. そして $|S| \subset [0,1]^{S_0}$ に相対位相を入れる. 以下ではこの位相で $|S|$ を位相空間とみなす.

こうして得られた位相空間 $|S|$ は次の意味でコンパクト生成な Hausdorff 位相空間である.

定義. 次の条件を満たす位相空間 X を**コンパクト生成位相空間** (compactly generated space) と呼ぶ.

- 部分集合 $A \subset X$ が閉集合 $\iff$ 任意のコンパクト部分空間 $K \subset X$ に対して $A \cap K$ が K の部分集合.

定義から直ちに次のが従う.

補題 A.2.1. 局所コンパクト Hausdorff 空間はコンパクト生成 Hausdorff 位相空間である.

局所コンパクト Hausdorff 空間の直積は局所コンパクト Hausdorff 空間だから, 有限集合 $A \subset S_0$ に対して $[0,1]^A$ はコンパクト生成 Hausdorff 位相空間である. よって $[0,1]^{S_0}$ もコンパクト生成 Hausdorff 位相空間である. 従って

補題. $|S|$ はコンパクト生成 Hausdorff 位相空間である.

定義 A.2.2. コンパクト生成 Hausdorff 位相空間を対象とし, それらの間の連続写像を射とする圏を CGH と書く.

[*2] ver. 0.2 で修正しました.

[*3] 順極限と呼ぶことの方が多いかもしれません.

[*4] 集合 X と位相空間の族 $\{Y_i\}_{i \in I}$ および写像の族 $\{f_i : Y_i \to X\}_{i \in I}$ が与えられているとする. この時 X 上の誘導位相 (終位相とも呼ぶ) とは,

$$U \subset X \text{ が開集合 } \iff \text{ 各 } i \in I \text{ に対して } f_i^{-1}(U) \subset Y_i \text{ が開集合}$$

で定まる X の位相のことです.

余極限の定義から, 各有限部分集合 $A \subset S_0$ に対して $f_A : [0,1]^A \to [0,1]^{S_0}$ が (一意に) 存在するので, この f_A 達に上記の誘導位相の定義を適用したものが $[0,1]^{S_0}$ 上の位相です.

問題 A.2.1. S と T を抽象的単体複体とし, $f : S \to T$ を単体写像 (定義 A.1.3) とする. 上記の構成 $S \mapsto |S|$ および $T \mapsto |T|$ から, 連続写像 $|f| : |S| \to |T|$ が定まり, そして次の函手が定まることを確認せよ.

$$|\cdot| : \mathsf{Set}_\Delta \longrightarrow \mathsf{CGH}.$$

定義. 函手 $|\cdot|$ を**幾何学的実現** (geometric realization) と呼ぶ.

A.2.2

次に函手 $\mathrm{Sing} : \mathsf{CGH} \to \mathsf{Set}_\Delta$ を構成しよう. まず $n \in \mathbb{N}$ に対し $\Delta^n_{\mathrm{Top}} \in \mathsf{CGH}$ を抽象的 n 単体 $\Delta^n \in \mathsf{Set}_\Delta$ の幾何学的実現として定義する:

$$\Delta^n_{\mathrm{Top}} := |\Delta^n| \in \mathsf{CGH}.$$

つまり

$$\Delta^n_{\mathrm{Top}} = \{(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_i \geq 0,\ \textstyle\sum_{i=0}^n x_i = 1\}.$$

$X \in \mathsf{CGH}$ に対し

$$\mathrm{Sing}(X)_n := \mathrm{Hom}_{\mathsf{CGH}}(\Delta^n_{\mathrm{Top}}, X) \in \mathsf{Set}_\Delta.$$

とし, 順序を保つ写像 $p : [m] \to [n]$ に対し

$$\mathrm{Sing}(p) := (- \circ p : \mathrm{Sing}(X)_n \longrightarrow \mathrm{Sing}(X)_m)$$

とすることで抽象的単体複体 $\mathrm{Sing}(X) \in \mathsf{Set}_\Delta$ が定まる.

問題 A.2.2. 上記の構成 $X \mapsto \mathrm{Sing}(X)$ から函手 $\mathrm{Sing} : \mathsf{CGH} \to \mathsf{Set}_\Delta$ が定まることを確認せよ.

A.2.3

命題 ([GJ, Chap. I, Proposition 2.2])**.** 函手の組

$$|\cdot| : \mathsf{Set}_\Delta \rightleftarrows \mathsf{CGH} : \mathrm{Sing}\,.$$

は随伴対である. つまり次の自然な全単射が存在する.

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{CGH}}(|S|\,, X) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathsf{Set}_\Delta}(S, \mathrm{Sing}(X)).$$

注意. この随伴対 $(|\cdot|\,, \mathrm{Sing})$ は圏同値を与えるわけではないが, **ホモトピー圏** (homotopy category) **の圏同値**を与えることが知られている. Set_Δ や CGH にはモデル圏 (model category) の構造が入って, ホモトピー圏 $\mathrm{Ho}(\mathsf{Set}_\Delta)$ および $\mathrm{Ho}(\mathsf{CGH})$ を取ることができる. $(|\cdot|\,, \mathrm{Sing})$ は考えているモデル構造について Quillen 随伴になっていて, それから圏同値

$$\mathrm{Ho}(\mathsf{Set}_\Delta) \xleftrightarrow{\sim} \mathrm{Ho}(\mathsf{CGH})$$

詳しい説明は [GJ, Chap. I, §11] を参照せよ.

A.3 単体複体のホモロジー

補題 A.3.1. 抽象的単体複体 $S \in \mathsf{Set}_\Delta$ の face map $d_j : S_n \to S_{n-1}$ と degeneracy map $s_j : S_n \to S_{n+1}$ (定義 A.1.2) は以下の **simplicial identities** を満たす:

$$\begin{cases} d_i d_j \;=\; d_{j-1} d_i & i < j \\ d_i s_j \;=\; s_{j-1} d_i & i < j \\ d_j s_j \;=\; 1 \;=\; d_{j+1} s_j & \\ d_i s_j \;=\; s_j d_{i-1} & i > j+1 \\ s_i s_j \;=\; s_{j+1} s_i & i \leq j \end{cases}$$

証明. 組み合わせ的単体の圏 $\mathbf{\Delta}$ の射 $p_j : [n-1] \to [n]$ および $q_j : [n+1] \to [n]$ (定義 A.1.1) が次の関係式 (cosimplicial identities) を満たすことから従う.

$$\begin{cases} p_j p_i \;=\; p_i p_{j-1} & i < j \\ q_j p_i \;=\; p_i q_{j-1} & i < j \\ q_j p_j \;=\; 1 \;=\; q_j p_{j+1} & \\ q_j p_i \;=\; p_{i-1} q_j & i > j+1 \\ q_j q_i \;=\; q_i q_{j+1} & i \leq j \end{cases}$$

□

問題 A.3.1. cosimplicial identities を確認せよ.

定義. S を抽象的単体複体とする. $n \in \mathbb{N}$ に対し $\mathbb{Z}S_n$ を集合 S_n で生成される自由加群とする. そして加群の準同型 $\partial_n : \mathbb{Z}S_n \to \mathbb{Z}S_{n-1}$ を次式で定義する

$$\partial_n \;=\; \textstyle\sum_{i=0}^{n} (-1)^i d_i.$$

補題. $\mathbb{Z}S := (\{\mathbb{Z}S_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{\partial_n\}_{n\in\mathbb{N}})$ は鎖複体 (chain complex) である. つまり各 $n \in \mathbb{Z}_{>1}$ に対し, 写像 $\mathbb{Z}S_n \to \mathbb{Z}S_{n-2}$ として $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$.

問題 A.3.2. simplicial identities (補題 A.3.1) を使って上の補題を証明せよ.

鎖複体は次のように表示されることが多い:

$$\mathbb{Z}S : \; \cdots \to \mathbb{Z}S_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} \mathbb{Z}S_n \xrightarrow{\partial_n} \mathbb{Z}S_{n-1} \to \cdots \to \mathbb{Z}S_1 \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z}S_0.$$

構成 $S \mapsto \mathbb{Z}S$ は函手的であることに注意する.

定義 (抽象的単体複体のホモロジー群)**.** 鎖複体 $\mathbb{Z}S := (\{\mathbb{Z}S_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{\partial_n\}_{n\in\mathbb{N}})$ を抽象的単体複体 $S \in \mathsf{Set}_\Delta$ の **Moore 複体** (Moore complex) と呼ぶ. そして次の次数付き加群 $H_*(S)$ を S の**ホモロジー群** (homology group) と呼ぶ.

$$H_*(S) \;:=\; H_*(\mathbb{Z}S) \;=\; \oplus_{n\in\mathbb{N}} H_n(\mathbb{Z}S), \quad H_n(\mathbb{Z}S) \;:=\; \mathrm{Ker}(\partial_n)/\,\mathrm{Im}(\partial_{n+1}).$$

$n \in \mathbb{Z}$ に対し n 次部分 $H_n(S)$ を n 次ホモロジー群と呼ぶ.

構成 $S \mapsto H_*(S)$ は函手的であることに注意する.

定義. コンパクト生成 Hausdorff 位相空間 X のホモロジー群を $\mathrm{Sing}(X) \in \mathsf{Set}_\Delta$ のホモロジー群として定義する:

$$H_*(X) = H_*(X, \mathbb{Z}) := H_*(\mathrm{Sing}(X)).$$

構成 $X \mapsto H_*(X)$ は函手的であることに注意する. 特に同相なコンパクト生成 Hausdorff 位相空間 $X \simeq Y$ についてホモロジー群は一致する: $H_*(X) \simeq H_*(Y)$. 言い換えると, **ホモロジー群は位相不変量である**.

位相多様体は局所コンパクト Hausdorff 空間なので, 補題 A.2.1 よりコンパクト生成 Hausdorff 位相空間である. そこで

定義 (多様体の特異ホモロジー群)**. 位相多様体 X のホモロジー群**をコンパクト生成 Hausdorff 位相空間としてのホモロジー群として定義する.

ホモロジー群をこの定義通りに計算するのは一般には容易ではない. 具体的な計算には胞体複体ないし CW 複体を用いる. これらについてはホモロジーの教科書 (例えば [中岡, §3.3]) を参照せよ.

A.4　Betti 数と Euler 標数

加群 M はねじれ部分 (torsion part) $\mathrm{Tor}(M)$ と自由部分 (free part) の直和に分けることができる: $M \simeq \mathrm{Tor}(M) \oplus \mathbb{Z}^{\oplus r}$. このときの r を M の階数 (rank) と呼んだ:

$$\operatorname{rank} M := r \in \mathbb{N} \sqcup \{\infty\}.$$

定義. X をコンパクト生成 Hausdorff 位相空間とする. $i \in \mathbb{N}$ に対し, i 次ホモロジー群 $H_i(X)$ の階数を **i 次 Betti 数**と呼び $b_i(X)$ と書く:

$$b_i(X) := \operatorname{rank} H_i(X).$$

Betti 数の交代和が Euler 標数である.

定義. X をコンパクト生成 Hausdorff 位相空間であってホモロジー群 $H_*(X)$ が有限生成加群であるものとする. この時

$$\chi(X) := \textstyle\sum_{i \geq 0} (-1)^i b_i(X)$$

を X の **Euler 標数** (Euler characteristic) と呼ぶ.

問題 A.4.1. "ホモロジー群 $H_*(X)$ が有限生成"という仮定から $\chi(X)$ が well-defined であることを確かめよ. つまり, 全ての $i \in \mathbb{N}$ について $b_i(X) < \infty$ であり, またある $n \in \mathbb{N}$ があって $i > n$ なら $b_i(X) = 0$ となることを確かめよ.

"ホモロジー群 $H_*(X)$ が有限生成"という仮定が成立する十分条件を一つ紹介する.

定理. X が n 次元コンパクト多様体なら, ホモロジー群 $H_*(X)$ は有限生成で, また $i > n$ なら $H_i(X) = 0$.

証明は, 例えば [中岡, §4.1] を参照せよ.

"Euler 標数"という名前の由来を簡単に説明する. 多面体 $K \subset \mathbb{R}^3$ を考える. K はコンパクト生成 Hausdorff 位相空間であって, ホモロジー群 $H_*(K)$ は有限生成加群である. また $i > 2$ なら $H_i(K) = 0$. 従って Euler 標数は

$$\chi(K) = b_0(L) - b_1(K) + b_2(K).$$

これは (頂点の数) − (辺の数) + (面の数) に一致する．つまり多面体の Euler 数である．

問題 A.4.2. $\chi(K)$ が多面体の Euler 数に一致することを確かめよ．

A.5　文献紹介

多様体のトポロジーに関しては, まず [百科, 第 1 章] を目を通して, 細かいところを [中岡] のような教科書で補って勉強することをお勧めします.

ホモロジー論の教科書では特異ホモロジー (singular homology) を使ってホモロジーを導入するのが普通ですが, この補遺では (本質的には同じですが) 単体的ホモトピー論に沿ってホモロジーを導入しました.

単体的ホモトピー論はモデル圏の理論や無限圏の理論 (∞-category) の基礎づけになっていて, 近年重要性が増しています．和書で解説しているものは少ないのですが, [河玉] を挙げておきます．英語であれば [GJ] をはじめ多くの書籍があります.

参考文献

[GJ] P. Goerss, J. F. Jardine, *Simplicial homotopy theory*, Progress in Mathematics **174**, Birkhauser, Basel, 1999.

[河玉] 河野明, 玉木大, 一般コホモロジー, 岩波書店, 2008.

[中岡] 中岡稔, 復刊 位相幾何学 — ホモロジー論, 共立出版, 1999.

[百科] 服部晶夫, 佐藤肇, 森田茂之, 多様体のトポロジー, 幾何学百科 I, 朝倉書店, 2016.