数学演習 VII・VIII　6 月 20 日分解答[*1]

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp
`https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida/2019S78.html`

9　曲線と曲面の幾何 2 (曲面の曲率)

9.1　曲面と面積分

問題 9.1. $a=(a_1,a_2,a_3)$, $b=(b_1,b_2,b_3)$ と置くと,

$$\det\begin{pmatrix}F(p)\\ p'\end{pmatrix} = \begin{vmatrix} sa_1+tb_1 & sa_2+tb_2 & sa_3+tb_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0$$

となるので, 求める面積分の値は 0.

問題 9.2.

$$\begin{aligned}\det\begin{pmatrix}F(p)\\ p'\end{pmatrix} &= \begin{vmatrix} a^2\cos^2 s & a^2\sin^2 s\cos^2 t & a^2\sin^2 s\sin^2 t \\ a\cos s\cos t & a\cos s\sin t & -a\sin s \\ -a\sin s\sin t & a\sin s\cos t & 0 \end{vmatrix} \\ &= a^4(\sin^2 s\cos^2 s\cos t+\sin^4 s\cos^2 t\sin t+\sin^3 s\cos s\sin^2 t).\end{aligned}$$

これを積分すると, t 積分で $\sin^3 s\cos s\sin^2 t$ の項だけが残って, 結果は $\pi a^4/4$.

問題 9.3. $p_s=(a\cos s\cos t, a\cos s\sin t, -a\sin s)$, $p_t=(-a\sin s\sin t, a\sin s\cos t, 0)$ より

$$p_s\times p_t = (a^2\sin^2 s\cos t, a^2\sin^2 s\sin t, a^2\cos s\sin s), \quad |p_s\times p_t| = a^2\sin s.$$

これを積分して, 結果は $4\pi a^2$.

問題 9.4. $p_s=(1,0,f_s)$, $p_t=(0,1,f_t)$ から $p_s\times p_t=(-f_s,-f_t,1)$. $g:=\sqrt{1+f_s^2+f_t^2}$ と置くと

$$A(S) = \iint |p_s\times p_t|\,dsdt = \iint g\,dsdt.$$

一方で $F(p)=(-f_s/g,-f_t/g,1/g)$ から

$$\det\begin{pmatrix}F\\ p'\end{pmatrix} = \begin{vmatrix} -f_s/g & -f_t/g & 1/g \\ 1 & 0 & f_s \\ 0 & 1 & f_t \end{vmatrix} = \frac{f_s^2+f_t^2+1}{g} = g, \quad \int_S F\cdot dA = \iint g\,dsdt.$$

よって両者は一致する.

9.2　曲率

問題 9.5. $p_u=(1,0,2au)$, $p_v=(0,1,2bv)$, $n=(-2au,-2bv,1)/\sqrt{4a^2u^2+4b^2v^2+1}$, $p_{uu}=(0,0,2a)$, $p_{uv}=(0,0,0)$, $p_{vv}=(0,0,b)$ より

$$I = \begin{pmatrix}1+4a^2u^2 & 4abuv \\ 4abuv & 4abuv\end{pmatrix}, \quad II = \frac{1}{\sqrt{4a^2u^2+4b^2v^2+1}}\begin{pmatrix}2a & 0\\ 0 & 2b\end{pmatrix}.$$

よって $(u,v)=(0,0)$ では $I^{-1}II=\begin{pmatrix}2a & 0\\ 0 & 2b\end{pmatrix}$ となって, $K=4ab$, $H=a+b$.

*1 2019/03/14 版, ver. 0.1.

問題 9.6. (1) $z = r^2(a\cos^2\theta + b\sin^2\theta)$.

(2) $y = f(x)$ で与えられる曲線の $(x, f(x))$ における曲率は $f''(x)/(1+f'(x)^2)^{3/2}$. 今は $f_\theta(r) = cr^2$, $c := a\cos^2\theta + b\sin^2\theta$ となっているので,

$$\kappa(\theta) = f''(0)/(1+f'(0)^2)^{3/2} = 2c = 2(a\cos^2\theta + b\sin^2\theta).$$

(3) $\kappa(\theta) = a + b + (a-b)\cos 2\theta$ なので, $\max = 2a$, $\min = 2b$, $\max\cdot\min = 4ab$, $(\max+\min)/2 = a+b$.

問題 9.7. $r := \sqrt{u^2+v^2}$ と略記すると, $p_u = (1, 0, u/r)$, $p_v = (0, 1, v/r)$, $n = (-u/r, -v/r, 1)/\sqrt{2}$, $p_{uu} = (0, 0, v^2/r^3)$, $p_{uv} = (0, 0, -uv/r^3)$, $p_{vv} = (0, 0, u^2/r^3)$. よって

$$I = \frac{1}{r^2}\begin{pmatrix} 2u^2+v^2 & uv \\ uv & u^2+2v^2 \end{pmatrix}, \quad II = \frac{1}{\sqrt{2}r^3}\begin{pmatrix} v^2 & -uv \\ -uv & u^2 \end{pmatrix}, \quad I^{-1}II = \frac{1}{\sqrt{2}r^3}\begin{pmatrix} v^2 & -uv \\ -uv & u^2 \end{pmatrix}.$$

よって $K = 0$, $H = 1/2\sqrt{2(u^2+v^2)}$.

問題 9.8. $p_u = (\cos v, \sin v, 0)$, $p_v = (-u\sin v, u\cos v, 1)$, $n = (\sin v, -\cos v, u)/\sqrt{1+u^2}$, $p_{uu} = (0, 0, 0)$, $p_{uv} = (-\sin v, \cos v, 0)$, $p_{vv} = (-u\cos v, -u\sin v, 0)$ より

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1+u^2 \end{pmatrix}, \quad II = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad I^{-1}II = \begin{pmatrix} 0 & -(1+u^2)^{-1/2} \\ -(1+u^2)^{-3/2} & 0 \end{pmatrix}.$$

よって $K = -(1+u^2)^{-2}$, $H = 0$.

問題 9.9. $a := \tan u$, $b := \tan v$ とおくと $p_u = (1, 0, a)$, $p_v = (0, 1, -b)$, $n = (-a, b, 1)/\sqrt{a^2+b^2+1}$, $p_{uu} = (0, 0, 1+a^2)$, $p_{uv} = (0, 0, 0)$, $p_v = (0, 0, -1-b^2)$ となるので

$$I = \begin{pmatrix} 1+a^2 & -ab \\ -ab & 1+b^2 \end{pmatrix}, \quad II = \frac{1}{\sqrt{1+a^2+b^2}}\begin{pmatrix} 1+a^2 & 0 \\ 0 & 1+b^2 \end{pmatrix},$$
$$I^{-1}II = \frac{1}{(1+a^2+b^2)^{3/2}}\begin{pmatrix} (1+a^2)(1+b^2) & -ab(1+b^2) \\ ab(1+a^2) & -(1+a^2)(1+b^2) \end{pmatrix}.$$

よって $K = -(1+a^2)(1+b^2)/(1+a^2+b^2)^2$, $H = 0$.

問題 9.10. (1) $p_u = (1+v^2-u^2, -2uv, 2u)$, $p_v = (2uv, v^2-u^2-1, -2v)$, $n = (2u, 2v, u^2+v^2-1)/(u^2+v^2+1)$, $p_{uu} = (-2u, -2v, 2)$, $p_{uv} = (2v, -2u, 0)$, $p_{vv} = (2u, 2v, -2)$ となるので

$$I = (u^2+v^2+1)^2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad II = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad I^{-1}II = (u^2+v^2+1)^{-2}\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

よって $K = -4(u^2+v^2+1)^{-4}$, $H = 0$.

(2) $|p_u \times p_v| = (u^2+v^2+1)^2$ なので

$$A(S) = \int_{u^2+v^2\le R^2} (u^2+v^2+1)^2\, dudv = \int_0^{2\pi}\int_0^R (r^2+1)^2 r\, drd\theta = \frac{\pi}{3}\big((R^2+1)^3 - 1\big).$$

問題 9.11. (1) $p(u_0, v_0)$ での接平面の単位法線ベクトルが $n(u_0, v_0)$ なので, 内積の幾何学意味から主張が得られる.

(2) 簡単のため $h(u,v) = h$, $n(0,0) = n_0$ 等と略記する. h の定義式を偏微分して $h_u = p_u\cdot n_0$, $h_v = p_v\cdot n_0$, $h_{uu} = p_{uu}\cdot n_0$, $h_{uv} = p_{uv}\cdot n_0$, $h_{vv} = p_{vv}\cdot n_0$. これらの式で $(u,v) = (0,0)$ とすると $h_u(0,0) = 0 = h_v(0,0)$, $h_{uu}(0,0) = L$, $h_{uv}(0,0) = M$, $h_{vv}(0,0) = N$. また定義から $h(0,0) = 0$ なので, 関数 $h(u,v)$ の $(0,0)$ での Taylor 展開は

$$\begin{aligned} h(u,v) &= h(0,0) + h_u(0,0)u + h_v(0,0)v + \frac{1}{2}(h_{uu}(0,0)u^2 + 2h_{uv}(0,0)uv + h_{vv}(0,0)v^2) + \cdots \\ &= \frac{1}{2}(Lu^2 + 2Muv + Nv^2) + \cdots. \end{aligned}$$

以上です.