数学演習 VII・VIII　6 月 20 日分問題[*1]

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp
https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida/2019S78.html

9　曲線と曲面の幾何 2 (曲面の曲率)

$\mathbb{R}^n$ は n 次元 Euclid 空間のこととします. ベクトルや行列 X に対して ${}^T X$ でその転置を表します.
各問題の冒頭にある $*$ の数は, その問題の難易度の目安を表しています.

9.1　曲面と面積分

定義 9.1. (1) $S \subset \mathbb{R}^3$ は次の条件を満たすとき p で**パラメータ表示された曲面**[*2] と呼ばれる: $V \subset \mathbb{R}^2$ は (s,t) を座標系とする Euclid 平面 $\mathbb{R}^2$ の開集合とし, p は閉包 $\overline{V}$ 上定義された連続写像

$$p : \overline{V} \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad p(s,t) \;=\; \bigl(x(s,t), y(s,t), z(s,t)\bigr)$$

だとする. p は V 上で単射で, かつ $S = p(\overline{V})$.

(2) $p : \overline{V} \to \mathbb{R}^3$ でパラメータ表示された曲面 $S \subset \mathbb{R}^3$ を考える. p の各成分 $x(s,t), y(s,t), z(s,t)$ が微分可能かつ, Jacobi 行列

$$p'(s,t) = \begin{pmatrix} x_s(s,t) & y_s(s,t) & z_s(s,t) \\ x_t(s,t) & y_t(s,t) & z_t(s,t) \end{pmatrix} \quad (x_s(s,t) := \tfrac{\partial x}{\partial s}(s,t) \text{ etc.})$$

の階数が V 上で常に 2 である時, S を**正則曲面**という. $p : \overline{V} \to \mathbb{R}^3$ の像であることを強調する場合は $S = S(p)$ と書く.

例. a を正の実数とすると.

$$p(s,t) \;=\; \bigl(a \sin s \cos t, a \sin s \sin t, a \cos s\bigr) \quad ((s,t) \in [0,\pi] \times [0, 2\pi])$$

は正則曲面 $S(p)$ を定める. $S(p)$ は原点を中心とした半径 a の球面である.

注意. 定義 9.1 (2) と教科書 [梅山, §6, p. 64] の正則曲面の定義は同値である. 実際,

$$\operatorname{rank} p' \;=\; 2 \iff p_s = (x_s, y_s, z_s) \text{ と } p_t = (x_t, y_t, z_t) \text{ は線形独立.}$$

定義 (面積分). $U \subset \mathbb{R}^3$ を開集合とし,

$$F : U \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad (x,y,z) \longmapsto \bigl(P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)\bigr)$$

を連続写像とする. S を

$$p : \overline{V} \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad p(s,t) \;=\; \bigl(x(s,t), y(s,t), z(s,t)\bigr)$$

[*1] 2019/03/14 版, ver. 0.1.
[*2] パラメータ付き曲面の定義は様々なヴァリエーションがあり, 例えば条件 “p は V 上で単射” を課さないことがあります.

でパラメータ表示される正則曲面とする．また $\overline{V} \subset U$ と仮定する．このとき

$$\int_S F\,dA := \iint_{\overline{V}} \det \begin{pmatrix} F(p) \\ p' \end{pmatrix} dsdt$$

を F の S **上の面積分**とよぶ．ここで被積分関数に現れる行列 $\begin{pmatrix} F(p) \\ p' \end{pmatrix}$ は, 次の (s,t) に関する関数を成分とする 3 次正方行列である．

$$\begin{pmatrix} F(p) \\ p' \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} P(p(s,t)) & Q(p(s,t)) & R(p(s,t)) \\ x_s(s,t) & y_s(s,t) & z_s(s,t) \\ x_t(s,t) & y_t(s,t) & z_t(s,t) \end{pmatrix}$$

問題 9.1 $(*)$**.** $a, b \in \mathbb{R}^3$ を線形独立なベクトルとし, $S \subset \mathbb{R}^3$ を

$$p(s,t) = sa + tb, \quad (s,t) \in [0,1] \times [0,1]$$

でパラメータ表示される曲面 (平行四辺形) とする．連続写像 $F(x,y,z) := (x,y,z)$ を S 上で面積分せよ．

問題 9.2 $(*)$**.** $a > 0$ とし, $S \subset \mathbb{R}^3$ を

$$p(s,t) = \big(a \sin s \cos t, a \sin s \sin t, a \cos s\big), \quad (s,t) \in [0, \pi/2] \times [0, 2\pi].$$

でパラメータ表示される曲面 (半径 a の球面の上半分) とする．連続写像 $F(x,y,z) = (z^2, x^2, y^2)$ を S 上で面積分せよ．

定義 9.2 (**曲面積**)**.** $S \subset \mathbb{R}^3$ は $p(s,t) = \big(x(s,t), y(s,t), z(s,t)\big) : V \to \mathbb{R}^3$ でパラメータ表示される正則曲面とする．S の**曲面積** $A(S)$ を

$$A(S) := \iint_{\overline{U}} |p_s \times p_t|\, dsdt$$

で定義する．但し $p_s := (x_s, y_s, z_s)$, $p_t := (x_t, y_t, z_t)$ であり, $p_s \times p_t$ は外積を表す．

問題 9.3 $(*)$**.** a を正の実数とするとき,

$$p(s,t) = (a \sin s \cos t, a \sin s \sin t, a \cos s), \quad (s,t) \in [0,\pi] \times [0, 2\pi]$$

でパラメータ表示される曲面 (半径 a の球面) の曲面積を, 上の定義 9.2 に従って求めよ .

問題 9.4 $(*)$**.** $f(s,t) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ は C^1 級関数であるとし, S は

$$p : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad p(s,t) := (s, t, f(s,t))$$

でパラメータ表示される正則曲面とする．連続写像 $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を

$$F(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{1 + (f_x)^2 + (f_y)^2}} \big(-f_x, -f_y, 1\big)$$

で定めると, 次の等式が成立することを示せ．

$$A(S) = \int_S F \cdot dA.$$

9.2 曲率

定義. $S \subset \mathbb{R}^3$ は

$$p(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)), \quad (u,v) \in D \subset \mathbb{R}^2$$

でパラメータ表示される正則曲面とする．曲面 S 上の点 $p(u,v)$ における単位法ベクトルは

$$n(u,v) = \frac{p_u \times p_v}{|p_u \times p_v|}$$

と表せる．この時, **第一基本行列** I と**第二基本行列** II を次のように定める[*3].

$$I = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} p_u \cdot p_u & p_u \cdot p_v \\ p_v \cdot p_u & p_v \cdot p_v \end{pmatrix}, \quad II = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} p_{uu} \cdot n & p_{uv} \cdot n \\ p_{vu} \cdot n & p_{vv} \cdot n \end{pmatrix}$$

さらに **Gauss 曲率** (Gaussian curvature または Gauss curvature) K と**平均曲率** (mean curvature) H を次のように定める.

$$K := \det(I^{-1}II), \quad H := \frac{1}{2}\operatorname{tr}(I^{-1}II).$$

問題 9.5 (∗). 曲面 $z = ax^2 + by^2$ のパラメータ表示を $p(u,v) = (u, v, au^2 + bv^2)$ とする．この曲面の $(u,v) = (0,0)$ での Gauss 曲率及び平均曲率を求めよ.

問題 9.6 (∗). 問題 9.5 と同じ設定で考える.

(1) 極座標表示 $(u,v) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ を用いて $z = au^2 + bv^2$ を r, θ の式で表せ.

(2) (1) で求めた式で, θ を固定し r の関数と見たものを $z = f_\theta(r)$ とする．このとき rz-平面における曲線 $z = f_\theta(r)$ の $r = 0$ における曲率 $\kappa(\theta)$ を求めよ.

(3) $a \geq b$ と仮定する．横軸を $\theta \in [0, 2\pi)$, 縦軸を $\kappa(\theta)$ とするグラフを描け．また $\kappa(\theta)$ の最大値 max, 最小値 min およびそれらの積 $\max \cdot \min$ と平均 $(\max + \min)/2$ を求めよ.

問題 9.7 (∗ **円錐面**). $S \subset \mathbb{R}^3$ を

$$p : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad p(u,v) = \left(u, v, \sqrt{u^2 + v^2}\right)$$

でパラメータ表示される曲面とする．S の各点での Gauss 曲率 K と平均曲率 H を求めよ.

問題 9.8 (∗ **螺旋面**). $S \subset \mathbb{R}^3$ を

$$p : [0, \infty) \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad p(u,v) = \left(u\cos v, u\sin v, v\right)$$

でパラメータ表示される曲面とする．S の各点での Gauss 曲率 K と平均曲率 H を求めよ.

問題 9.9 (∗ **Scherk の曲面**). $S \subset \mathbb{R}^3$ を

$$p : (-\pi/2, \pi/2)^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad p(u,v) = \left(u, v, \log(\cos v / \cos u)\right)$$

でパラメータ表示される曲面とする．S の各点での Gauss 曲率 K と平均曲率 H を求めよ.

[*3] 教科書 [梅山, §7, §8] では $\widehat{I}$, $\widehat{II}$ と書かれています.

問題 9.10 (∗ **Enneper 曲面**)**.** $S \subset \mathbb{R}^3$ を以下の写像 p でパラメータ表示される曲面とする.

$$p : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad p(u,v) \;=\; \bigl(u + uv^2 - u^3/3, v^3/3 - v - u^2v, u^2 - v^2\bigr).$$

(1) S の Gauss 曲率と平均曲率を求めよ.

(2) 曲面 S を $\{(u,v) \mid u^2 + v^2 \le R^2\}$ の範囲に制限した部分の面積を求めよ.

定義. 各点における平均曲率が 0 である曲面を**極小曲面** (minimal surface)[*4] と呼ぶ.

問題 9.11 (∗ **第二基本行列の意味**)**.** 曲面のパラメータ表示を $p(u,v)$ とする.

(1) 曲面上の点 $p(u_0,v_0)$ を固定する. その点での接平面と曲線上の任意の点 $p(u,v)$ の距離は

$$h(u,v) \;:=\; \bigl(p(u,v) - p(u_0,v_0)\bigr) \cdot n(u_0,v_0)$$

を用いて $|h(u,v)|$ となることを示せ.

(2) 簡単のため $(p_0,q_0) = (0,0)$ とし, (1) の関数 $h(u,v)$ を 2 次まで Taylor 展開すると,

$$h(u,v) \;=\; \frac{1}{2}(Lu^2 + 2Muv + Nv^2) + (3\text{ 次以上の項})$$

となることを示せ. ここで L, M, N は第二基本行列 $I\!I$ の成分.

9.3 レポート問題

レポートの締め切りは (今学期末までという自明なものを除いて) 特に設けません.

次の問題は [梅山, §8, 命題 8.6] に基づきます.

レポート問題 9.1 (∗∗ **合同変換と曲率の不変性**)**.** (1) Euclid 空間 $\mathbb{R}^3$ の全単射 $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ であって, 任意の 2 点間の距離を保つものを**等長変換** (isometry) もしくは**合同変換** (congruence transformation) と呼ぶ[*5]. 合同変換は回転と平行移動の合成で書けることを示せ. つまり, $\mathbb{R}^3$ の元を縦ベクトルとみなすと, 任意の合同変換 $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ に対してある 3 次の直交行列 A と $w \in \mathbb{R}^3$ が存在して,

$$\varphi(v) \;=\; Av + w \quad \forall\, v \in \mathbb{R}^3. \tag{9.1}$$

またこのような (A,w) は φ に対して一意に決まることを示せ.

(2) 曲面 $S \subset \mathbb{R}^3$ の (各点での)Gauss 曲率は, 任意の合同変換で不変であることを示せ.

(3) 合同変換 φ は, (9.1) の様に書いた時の直交行列 A が $\det A = 1$ を満たすとき, **向きを保つ合同変換**と呼ばれる. 曲面 $S \subset \mathbb{R}^3$ の (各点での) 平均曲率は, 向きを保つ合同変換で不変であることを示せ.

参考文献

[梅山] 梅原雅顕, 山田光太郎, **曲線と曲面 — 微分幾何学的アプローチ**—, 改訂第 3 版, 裳華房 (2018).

以上です.

[*4] “微分幾何学における極小曲面” といった方が正確です. 他にも “代数幾何学における極小曲面”という概念があります.

[*5] 等長変換は任意の距離空間に対して定義できる概念です.