数学演習 VII・VIII　6 月 6 日分小テスト解答[*1]

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp
https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida/2019S78.html

問題. G を群, N と M を G の正規部分群とし, $N \subset M$ であると仮定する. このとき次を示せ.

(1) 写像 $\varphi : G/N \to G/M$, $xN \mapsto xM$ は全射準同型.

(2) M/N は G/N の正規部分群であって, $G/M \simeq (G/N)/(M/N)$.

解答. (1) $N \subset M$ より φ は well-defined. 準同型であることは, $N \lhd G$ より $(x_1N)(x_2N) = x_1x_2NN = x_1x_2N$ となることから従う. 全射性は G/M の任意の元が xM, $x \in G$ と書けることから従う.

(2) 準同型 φ の核を考えると

$$\operatorname{Ker}\varphi \;=\; \{xN \in G/N \mid xM = 0 \in G/M\} \;=\; \{xN \in G/N \mid x \in M\} \;=\; M/N.$$

準同型の核は正規部分群であることから $M/N \lhd G/N$. また準同型定理から

$$G/M \simeq (G/N)/\operatorname{Ker}\varphi = (G/N)/(M/N).$$

コメント. $2+3$ 点で採点しました. 平均点は 3.4 点でした. この問題は完答できるようにして下さい. (2) の同型は第三同型定理と呼ばれることがあります.

$M/N \lhd G/N$. は以下のように直接示すこともできます.

$M/N \subset G/N$ は自然に部分群になるので, 正規部分群であることのみ示す. 任意の $mN \in M/N$ 及び $gN \in G/N$ について,

$$\begin{aligned}(gN)^{-1}(mN)(gN) \;&=\; N^{-1}g^{-1}mNgN \overset{*1}{=} g^{-1}N^{-1}mgNN \overset{*3}{=} g^{-1}NmgN \\ &\overset{*2}{=} g^{-1}mNgN \overset{*1}{=} g^{-1}mgNN \overset{*3}{=} g^{-1}mgN.\end{aligned}$$

但し $*1$ では $N \lhd G$ を, $*2$ では $N \lhd M$ を, $*3$ では $N \subset G$ が部分群であることを用いた. 一方で $M \lhd G$ より $g^{-1}mg \in M$ なので, $(gN)^{-1}(mN)(gN) = g^{-1}mgN \in M/N$. これで示せた.

以上です.

[*1] 2019/06/06 版, ver. 0.1.