数学演習 VII・VIII　追加レポート問題*1

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp
https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida/2019S78.html

易しめのレポート問題を用意しました. 次回 **6 月 20 日**の演習の時間を提出の締切とします.

問題 1 (10 点)**.** n を 2 以上の整数とし, 複素数成分の n 次正方行列全体の集合 M に二項関係 $\sim$ を次のように定める.

$$A \sim B \iff A = PBP^{-1} \text{ を満たす正則行列 } P \in M \text{ が存在する.}$$

(1) $\sim$ が同値関係であることを示せ.
以下, 商集合 $M/\sim$ における $A \in M$ の同値類を $[A] \in M/\sim$ と書く.
(2) 写像 $f : (M/\sim) \to \mathbb{C}$ を $f([A]) := \det A$ で定める. f が well-defined であることを示せ.
(3) 写像 $g : (M/\sim) \to \mathbb{C}$ を $g([A]) := \operatorname{tr} A$ で定める. g が well-defined であることを示せ.
(4) 写像 $F : (M/\sim) \to \mathbb{C}^2$ を $F([A]) := (\det A, \operatorname{tr} A)$ で定める. F は全射ではあるが単射ではないことを示せ.

問題 2 (10 点)**.** n を 2 以上の整数とする. 対称群 S_n について, 次の (1) と (2) のそれぞれが生成元の組であることを示せ. 但し $(p, q, \dots, r)$ は巡回置換を表すものとする.
(1) $\{(i, j) \mid 1 \le i < j \le n\}$.　　(2) $\{(1, 2), (1, 2, \dots, n)\}$.

問題 3 (5 点)**.** G を有限群とし, H_1 と H_2 を G の部分群とする. $|H_1|$ と $|H_2|$ が互いに素ならば $H_1 \cap H_2 = \{e_G\}$ となることを示せ. 但し e_G は G の単位元.

問題 4 (10 点)**.** $\mathbb{R}$ 上の Lebesgue 測度を考える.
(1) 関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を

$$f(x) := \begin{cases} 1 & (x \in \mathbb{Q}) \\ 0 & (x \notin \mathbb{Q}) \end{cases}$$

と定める. この時 $f(x) = 0$ a.e. であることを示せ.
(2) $\mathbb{R}$ 上の可積分関数 f に対し次の等式が成立することを示せ.

$$\lim_{n \to \infty} \int_{-n}^{n} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$$

以上です.

*1 2019/05/22 版, ver. 0.1.