数学演習 VII · VIII　6 月 6 日分解答[*1]

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp
https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida

8 Lebesgue 積分 2 (可測関数, 積分, 収束定理)

8.1 Lebesgue 可測関数

$\mathbb{R}$ の Lebesgue 可測集合全体のなす集合を $\mathscr{M}$ と表す. $\mathscr{M}$ の性質

$$\mathbb{R} \in \mathscr{M}; \quad A \in \mathscr{M} \Longrightarrow A^c \in \mathscr{M}; \quad A_k \in \mathscr{M} \ (k = 1, 2, \ldots) \Longrightarrow \cup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathscr{M}$$

を思い出しておく.

問題 8.1. 開集合 $U \subset \mathbb{R}$ の逆像 $f^{-1}(U)$ は開集合で, 事実 "$\mathbb{R}$ の任意の開集合 U は可算個の互いに素な開区間の和で書ける" と開区間が可測集合であることから $f^{-1}(U) \in \mathscr{M}$. よって可測関数の最初の条件が示せた. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ なので $f^{-1}(\{\infty\}) = f^{-1}(\{-\infty\}) = \emptyset \in \mathscr{M}$. よって 2 番目の条件も示せた.

問題 8.2. 可測関数の最初の条件を示すためには

$$\text{任意の開区間 } I = (a, b) \subset \mathbb{R} \text{ に対して } f^{-1}(I) \in \mathscr{M}$$

を示せば十分. 実際, もしこれが示せれば, 事実 "$\mathbb{R}$ の任意の開集合 U は可算個の互いに素な開区間の和で書ける" から $U = \cup_{k=1}^{\infty}(a_k, b_k)$ と書けて, $f^{-1}(U) = \cup_{k=1}^{\infty} f^{-1}((a_k, b_k)) \in \mathscr{M}$ となり, 最初の条件を得る.

仮定より任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して $f^{-1}((a, \infty]) \in \mathscr{M}$. すると $f^{-1}([-\infty, a]) = \big(f^{-1}((a, \infty])\big)^c \in \mathscr{M}$. また, 任意の半開区間 $(a, b] \subset \mathbb{R}$ に対して, $f^{-1}((a, b]) = f^{-1}([-\infty, b]) \cap f^{-1}((a, \infty]) \in \mathscr{M}$. 最後に, 任意の開区間 $(a, b) \subset \mathbb{R}$ に対して, $\varepsilon = (b - a)/2$ とすれば $f^{-1}((a, b)) = \cup_{k=1}^{\infty} f^{-1}((a, b - \varepsilon/2^k]) \in \mathscr{M}$ 以上で最初の条件が示せた.

次に $f^{-1}(\{\infty\}) = \cap_{k=1}^{\infty} f^{-1}((k, \infty]) = \big(\cup_{k=1}^{\infty}\big(f^{-1}((k, \infty])\big)^c\big)^c$ と $f^{-1}((k, \infty]) \in \mathscr{M}$ より $f^{-1}(\{\infty\}) \in \mathscr{M}$. 同様に, $f^{-1}(\{-\infty\}) = \cap_{k=1}^{\infty} f^{-1}([-\infty, -k]) = \big(\cup_{k=1}^{\infty}\big(f^{-1}([-\infty, -k])\big)^c\big)^c$ と $f^{-1}([-\infty, -k]) \in \mathscr{M}$ より $f^{-1}(\{-\infty\}) \in \mathscr{M}$. よって 2 番目の条件も示せた.

問題 8.3. 問題 8.2 と同様の方針をとる.

可測関数の最初の条件を確認するためには, "任意の開区間 $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ に対して $f^{-1}(I) \in \mathscr{M}$" を示せば十分.

任意の $b \in \mathbb{R}$ に対して $f^{-1}([b, \infty]) \in \mathscr{M}$. すると $f^{-1}([-\infty, b)) = \big(f^{-1}([b, \infty])\big)^c \in \mathscr{M}$. また任意の半開区間 $[a, b) \subset \mathbb{R}$ に対して, $f^{-1}([a, b)) = f^{-1}([-\infty, b)) \cap f^{-1}([a, \infty]) \in \mathscr{M}$. よって任意の開区間 $(a, b) \subset \mathbb{R}$ に対して, $\varepsilon = (b - a)/2$ とすれば $f^{-1}((a, b)) = \cup_{k=1}^{\infty} f^{-1}([a + \varepsilon/2^k, b)) \in \mathscr{M}$.

2 番目の条件について. $f^{-1}(\{\infty\}) = \cap_{k=1}^{\infty} f^{-1}([k, \infty]) = \big(\cup_{k=1}^{\infty}\big(f^{-1}([k, \infty])\big)^c\big)^c$ と $f^{-1}([k, \infty]) \in \mathscr{M}$ より $f^{-1}(\{\infty\}) \in \mathscr{M}$. $f^{-1}(\{-\infty\})$ については問題 8.2 と全く同じ議論で示せる.

[*1] 2019/06/06 版, ver. 0.2.

問題 8.4. 問題 8.2 の条件が満たされることを示せば十分. 任意の $a \in \mathbb{R}$ に対し

$$|f|^{-1}((a,\infty]) \;=\; f^{-1}((a,\infty]) \cup f^{-1}([-\infty,-a)) \;=\; f^{-1}((a,\infty]) \cup \big(f^{-1}([-a,\infty])\big)^c \in \mathscr{M}.$$

最後で問題 8.2, 8.3 を用いた.

問題 8.5. $(a,\infty] = \{\infty\} \sqcup (a,\infty)$ より $f^{-1}((a,\infty]) = f^{-1}(\{\infty\}) \cup f^{-1}((a,\infty))$. (a,∞) は開集合なので $f^{-1}((a,a+r)) \in \mathscr{M}$. また $f^{-1}(\{\infty\}) \in \mathscr{M}$ なので $f^{-1}((a,\infty]) \in \mathscr{M}$.

同様に, $[a,\infty] = [-\infty,a)^c$ から $f^{-1}([a,\infty]) = f^{-1}([-\infty,a))^c = \big(f^{-1}(\{-\infty\}) \cup f^{-1}((-\infty,a))\big)^c \in \mathscr{M}$.

問題 8.6. 問題 8.2, 8.3, 8.5 の結果を用いる.

(1) $a \in \mathbb{R}$ とする. k が奇数なら $(f^k)^{-1}((a,\infty]) = f^{-1}((a^{1/k},\infty])$ となる.
k が偶数なら, $a \geq 0$ の時は $(f^k)^{-1}((a,\infty]) = f^{-1}((a^{1/k},\infty]) \cup f^{-1}([-\infty,-a^{1/k}))$ となり, $a < 0$ の時は $(f^k)^{-1}((a,\infty]) = f^{-1}([-\infty,\infty]) = f^{-1}([-\infty,0)) \cup f^{-1}((0,\infty])$ となる.
よって k の偶奇に関わらず, 任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して $(f^k)^{-1}((a,\infty])$ は可測集合. よって f^k は可測関数.

(2) $r > 0$ なら $(rf)^{-1}((a,\infty]) = f^{-1}((a/r,\infty])$ となって, これは可測集合. よって rf は可測関数.
$r = 0$ なら, $a \geq 0$ に対して $(rf)^{-1}((a,\infty]) = \emptyset$, $a < 0$ に対して $(rf)^{-1}((a,\infty]) = E$ となる. どちらにせよ可測集合なので, $rf = 0$ は可測関数.
$r < 0$ なら $(rf)^{-1}((a,\infty]) = f^{-1}([-\infty,-a/r)) = f^{-1}([a/r,\infty])^c$ となり, これは可測集合. よって rf は可測関数.

(3) $f+g$ については

$$(f+g)^{-1}((a,\infty]) \;=\; \bigcup_{r\in\mathbb{Q}} f^{-1}((a-r,\infty]) \cap g^{-1}((r,\infty])$$

より可測集合だと分かる. すると (2) より $f-g$ も可測関数であり,

$$fg = \frac{1}{4}\big((f+g)^2 - (f-g)^2\big)$$

なので, (1) と (2) を繰り返し用いて fg も可測関数だと分かる.

8.2 Lebesgue 積分

問題 8.7. f_+ について. 問題 8.2 の条件を確認すれば十分.

$$f_+^{-1}((a,\infty]) \;=\; \begin{cases} f^{-1}((a,\infty]) & (a \geq 0) \\ E & (a < 0) \end{cases}$$

となり, 問題 8.5 よりどちらの場合も $\mathscr{M}$ の元なので, $f_+^{-1}((a,\infty]) \in \mathscr{M}$. f_- についても同様に

$$f_-^{-1}((a,\infty]) \;=\; \begin{cases} f^{-1}([-\infty,-a)) = \big(f^{-1}([-a,\infty])\big)^c & (a \geq 0) \\ E & (a < 0) \end{cases}$$

となり, 問題 8.5 よりどちらの場合も $\mathscr{M}$ の元なので $f_-^{-1}((a,\infty]) \in \mathscr{M}$.

問題 8.8. f が E 上で Lebesgue 積分可能なので, $F_+ := \int_E f_+(x)\,dx$ と $F_- := \int_E f_+(x)\,dx$ は共に非負有限値. すると $\int_E |f(x)|\,dx = F_+ + F_- < \infty$. また $|\int_E f(x)\,dx| = |F_+ - F_-| \leq F_+ + F_-$ なので, 証明が終わった.

8.3 殆ど至る所

問題 8.9. (1) $f = g$ a.e. より, 任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して $f^{-1}((a,\infty])$ と $g^{-1}((a,\infty])$ の差は測度 0 の可測集合である. f は可測関数だから, 問題 8.5 より $f^{-1}((a,\infty])$ は可測集合. よって $g^{-1}((a,\infty])$ も可測集合. 従って問題 8.2 より g は可測関数.

(2) $f(x_0) \neq g(x_0)$ となる $x_0 \in E$ があると仮定する. f と g が連続関数なので, x_0 を含むある開区間 $I \subset E$ が存在して, その上で常に $f(x) \neq g(x)$. しかし $\mu(I) = |I| > 0$ なので, $f = g$ a.e. に反する.

(3) $k \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し

$$E_k := \{x \in E \mid f(x) \geq 1/k\}$$

と定める. $k^{-1}\chi_{E_k}(x) \leq f(x)$ なので $\int_E k^{-1}\chi_{E_k}(x)\,dx \leq \int_E f(x)\,dx$. よって

$$\frac{1}{k}\mu(E_k) \leq \int_E f(x)\,dx.$$

仮定より右辺が 0 なので, 任意の k に対し $\mu(E_k) = 0$. $f^{-1}((0,\infty]) = \cup_{k=1}^{\infty} E_k$ なので $f = 0$ a.e..

8.4 Lebesgue 収束定理

問題 8.10. $x > 1$ で考える. $g_n(x) := f(x)/x^n$ とすると $g_n(x) \to 0$ $(n \to \infty)$ また $|g_n(x)| < |f(x)|$ で $|f(x)|$ は可積分. よって Lebesgue 収束定理 (優収束定理) が使えて

$$\lim_{n\to\infty}\int_1^\infty \frac{f(x)}{x^n}\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_1^\infty g_n(x)\,dx = \int_1^\infty \bigl(\lim_{n\to\infty} g_n(x)\bigr)\,dx = \int_1^\infty 0\,dx = 0.$$

問題 8.11. $g_n(x) := (1 + x/n)^n$ とすると, $x \geq 0$ において $0 \leq g_n(x) \leq g_{n+1}(x)$, $g_n(x) \to e^x$ $(n \to \infty)$. よって単調収束定理が適用できて

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\pi \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \sin x\,dx = \int_0^\pi e^x \sin x\,dx = \left[\frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x)\right]_0^\pi = \frac{1}{2}(e^\pi + 1).$$

問題 8.12. $(\log x)/(1-x) = \sum_{n=0}^\infty x^n \log x$ に注意して, $g_k(x) := \sum_{n=0}^k x^k \log x$ とすると, $(0,1)$ 上で $0 > g_k(x) > g_{k+1}(x)$ かつ $g_k(x) \to f(x)$ $(k \to \infty)$. よって $(\{-g_k(x)\}_{k=1}^\infty$ に) 単調収束定理が適用できて

$$\int_0^1 \frac{\log x}{1-x}\,dx = \lim_{k\to\infty}\int_0^1 \sum_{n=0}^k x^n \log x\,dx = \sum_{n=0}^\infty \int_0^1 x^n \log x\,dx.$$

部分積分で

$$\int_0^1 x^n \log x\,dx = \left[\frac{1}{(n+1)^2}\bigl((n+1)\log x - 1\bigr)x^{n+1}\right]_0^1 = -\frac{1}{(n+1)^2}.$$

となるので,

$$\int_0^1 \frac{\log x}{1-x}\,dx = -\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(n+1)^2} = -\frac{\pi^2}{6}.$$

問題 8.13. (1) 問題 8.8 より $|f|$ が $\mathbb{R}$ 上可積分であることに注意する. また f が有界なので $B > 0$ を $|f(x)| < B$ となるように取ると,

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2/t}|f(x)|\,dx \leq B\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2/t}\,dx = B\int_{-\infty}^\infty e^{-y^2}\sqrt{t}dy = B\sqrt{\pi t} \leq \infty.$$

よって $e^{-x^2/t}|f(x)|$ は $\mathbb{R}$ 上で可積分. 再び問題 8.8 より $e^{-x^2/t}f(x)$ は可積分.

(2) 上と同様に $x=\sqrt{t}y$ と変数変換すると

$$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-x^2/t}\,dx \;=\; \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(\sqrt{t}y)e^{-y^2}\,dy.$$

(1) と同様に B を取ると, $|f(\sqrt{t}y)e^{-y^2}|<Be^{-y^2}$ となる. Be^{-y^2} は $\mathbb{R}$ 上可積分なので, 優収束定理が適用できて,

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0+}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(\sqrt{t}y)e^{-y^2}\,dy \;&=\; \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\lim_{t\to 0+} f(\sqrt{t}y)e^{-y^2}\right)dy\\ &=\; \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(0)e^{-y^2}\,dy \;=\; f(0).\end{aligned}$$

問題 8.14 (*)**.** $g_\xi(x):=f(x)e^{-ix\xi}$ とする. $|g_\xi(x)|=|f(x)|$ より $g_\xi(x)$ は $\mathbb{R}$ 上の可積分関数で, $\widehat{f}(\xi)=\int_{\mathbb{R}} g_\xi(x)\,dx$ は有限値. また $\xi\to\xi_0$ なら各 $x\in\mathbb{R}$ で $g_\xi(x)\to g_{\xi_0}(x)$. よって優収束定理が使えて $\widehat{f}(\xi)\to\widehat{(f)}(\xi_0)$ となる. つまり $\widehat{f}$ は連続関数.

以上です.