数学演習 VII・VIII　6 月 6 日分問題[*1]

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp
https://math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida/2019S78.html

8　Lebesgue 積分 2 (可測関数, 積分, 収束定理)

各問題の冒頭にある $*$ の数は, その問題の難易度の目安を表しています.

以下 μ を $\mathbb{R}$ の Lebesgue 測度とし, また「集合 $X \subset \mathbb{R}$ が可測である」とは「X が Lebesgue 可測である」の意味とします.

8.1　Lebesgue 可測関数

以下 $[-\infty, \infty] := \{-\infty\} \sqcup \mathbb{R} \sqcup \{\infty\}$ とする.

定義 8.1. $E \subset \mathbb{R}$ を可測集合とする. 関数 $f : E \to [-\infty, \infty]$ が以下の 2 条件を満たすとき, f は E 上の**可測関数**であるという.

(1) 任意の開集合 $U \subset \mathbb{R}$ に対し $f^{-1}(U)$ は可測集合.

(2) $f^{-1}(\{\infty\})$ と $f^{-1}(\{-\infty\})$ はともに可測集合.

以下の問題を解く際には, 次の事実を用いてよい.

事実. $\mathbb{R}$ の任意の開集合は, 互いに素な可算個の開区間の和で書ける.

問題 8.1 $(*)$**.** 連続関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は $\mathbb{R}$ 上の可測関数であることを証明せよ.

問題 8.2 $(**)$**.** 可測集合 $E \subset \mathbb{R}$ 上の関数 $f : E \to [-\infty, \infty]$ を考える. 任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して $\{x \in E \mid f(x) > a\}$ が可測集合であるならば, $f(x)$ は E 上の可測関数であることを証明せよ.

問題 8.3 $(**)$**.** 可測集合 $E \subset \mathbb{R}$ 上の関数 $f : E \to [-\infty, \infty]$ を考える. 任意の $b \in \mathbb{R}$ に対して $\{x \in E \mid f(x) \geq b\}$ が可測集合であるならば, $f(x)$ は E 上の可測関数であることを証明せよ.

問題 8.4 $(*)$**.** f が可測関数なら $|f|$ も可測関数であることを証明せよ.

問題 8.5 $(*)$**.** 問題 8.2 や問題 8.3 の逆が成り立つことを示せ. つまり, もし $f : E \to [-\infty, \infty]$ が可測関数なら, 問題 8.2 の条件が成立し, また問題 8.3 の条件も成立する.

注意. 以上の議論により, 可測関数の定義として定義 8.1, 問題 8.2, 問題 8.3 のどれを用いても良い.

問題 8.6 $(*)$**.** (1) $f : E \to [-\infty, \infty]$ が可測関数なら, 各 $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ に対して f^k も可測関数であることを示せ.

(2) $f : E \to [-\infty, \infty]$ が可測関数なら, 各 $r \in \mathbb{R}$ に対して rf も可測関数であることを示せ.

(3) $f, g : E \to \mathbb{R}$ が可測関数なら $f + g$ と fg はともに可測関数であることを示せ.

[*1] 2019/06/06 版, ver. 0.2.

8.2 Lebesgue 積分

定義. 集合 $A \subset \mathbb{R}$ の**特性関数** $\chi_A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を次のように定義する.

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}.$$

注意. この定義と可測関数の定義 8.1 から, $E \subset \mathbb{R}$ が可測なら特性関数 χ_E は可測関数であることが従う.

定義. 可測集合 $E \subset \mathbb{R}$ 上の関数 $s : E \to \mathbb{R}$ は, 互いに交わらない可測集合の有限族 $\{A_j \mid j = 1, \dots, n\}$ と $a_j \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ $(1 \leq j \leq n)$ が存在して

$$s(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{A_j}(x)$$

と表されるとき, **非負値可測単関数**とよばれる. このとき

$$\int_E s(x)\,dx := \sum_{j=0}^{n} a_j \mu(A_j)$$

と定義して, 得られた値 $(\in [0, \infty])$ を**非負値可測単関数** s **の** E **上の Lebesgue 積分**とよぶ.

定義. $f : E \to [0, \infty]$ を可測集合 $E \subset \mathbb{R}$ 上の非負値可測関数とする. すなわち, f は E 上の可測関数で, 任意の $x \in E$ に対して $f(x) \geq 0$ であると仮定する. このとき[*2]

$$S := \{s : E \to \mathbb{R} \mid E \text{ 上の非負値可測単関数},\ \forall x \in E\ 0 \leq s(x) \leq f(x)\}$$

と定める. そして**非負値可測関数** f **の** E **上の Lebesgue 積分**を次のように定義する。

$$\int_E f(x)\,dx := \sup_{s \in S} \int_E s(x)\,dx.$$

問題 8.7 $(*)$**.** $f : E \to [-\infty, \infty]$ を可測集合 $E \subset \mathbb{R}$ 上の可測関数とする. 任意の $x \in E$ に対して

$$f_+(x) := \max\{f(x), 0\}, \quad f_-(x) := \max\{-f(x), 0\}$$

と定めると, $f_+(x)$ と $f_-(x)$ は E 上の非負値可測関数になることを証明せよ.

次の定義では $a \in \mathbb{R}$ に対し

$$a + \infty = \infty + a = \infty, \quad a - \infty = -\infty + a = -\infty.$$

と約束する.

定義. $E \subset \mathbb{R}$ を可測集合, $f : E \to \mathbb{R}$ を可測関数とし, $f_\pm(x)$ を問題 8.7 で定めた可測関数とする. $\int_E f_+(x)dx$ と $\int_E f_-(x)dx$ の少なくとも一方が有限になるとき, **可測関数** f **の** E **上の Lebesgue 積分**を次式で定める.

$$\int_E f(x)\,dx := \int_E f_+(x)\,dx - \int_E f_-(x)\,dx \quad (\in [-\infty, \infty]).$$

この値が有限になるとき, $f(x)$ は E 上で **Lebesgue 積分可能**, あるいは **Lebesgue 可積分**であるという.

[*2] ver. 0.2 で訂正しました.

問題 8.8 (∗)**.** 可測関数 $f : E \to [-\infty, \infty]$ が E 上で Lebesgue 積分可能なら, 次式が成り立つことを示せ.

$$\left|\int_E f(x)\,dx\right| \le \int_E |f(x)|\,dx \,<\, \infty.$$

8.3　殆ど至る所

定義. $E \subset \mathbb{R}$ を可測集合とする. 命題 P が E 上**殆ど至る所** (almost everywhere, a.e.) で成立するとは, 部分可測集合 $N \subset E$ で $\mu(N) = 0$ となるものが存在して, 命題 P が $E \setminus N$ 上成立する, という意味である.

問題 8.9 (∗)**.** $E \subset \mathbb{R}$ を可測集合とし, $f, g : E \to [-\infty, \infty]$ を関数とする.

(1) f が可測関数で, g は f と殆ど至る所で等しいとする. このとき g も可測関数となることを示せ.

(2) f と g は連続関数 $E \to \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ で, 殆ど至る所で等しいとする. このとき全ての $x \in E$ で $f(x) = g(x)$ となることを示せ.

(3) f は可測関数で, 任意の $x \in E$ で $f(x) \ge 0$ であり, 更に $\int_E f(x)dx = 0$ だとする. このとき殆ど至る所で $f(x) = 0$ であることを示せ.

8.4　Lebesgue 収束定理

以下の積分は全て Lebesgue 積分の意味とする. また $\int_{(a,b)} f(x)\,dx$ を $\int_a^b f(x)\,dx$ と書く.

定理. 可測集合 $E \subset \mathbb{R}$ 上の可測関数の列 f_n が E の各点で可測関数 f に収束しているとする. 更に 2 条件

単調収束定理の条件: 非負 $f_n \ge 0$ かつ単調増加 $f_{n+1} \ge f_n$
優収束定理の条件: 可測関数 g が存在して $|f_n| \le g$ かつ g が可積分

の**どちらか**が成立していると仮定する. このとき積分の極限の順序交換が可能, つまり次式が成立する.

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\,dx \,=\, \int_E f(x)\,dx.$$

問題 8.10 (∗)**.** f が可積分関数ならば次式が成立することを示せ.

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^\infty \frac{f(x)}{x^n} dx \,=\, 0.$$

問題 8.11 (∗)**.** 次の極限を求めよ.

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\pi \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \sin x\,dx$$

問題 8.12 (∗)**.** 次の積分を求めよ.

$$\int_0^1 \frac{\log x}{1-x}\,dx.$$

次の問題 8.13 では $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ を既知とする.

問題 8.13 (** **熱核 (heat kernel) 関数**)**.** 可測関数 $f(x)$ は有界かつ $x = 0$ で連続だとする.

(1) $t > 0$ とする. 関数 $e^{-x^2/t} f(x)$ が $\mathbb{R}$ 上で可積分であることを示せ.

(2) 次の極限を求めよ.

$$\lim_{t \to 0+} \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-x^2/t} \, dx.$$

問題 8.14 (* **Fourier 変換**)**.** f を $\mathbb{R}$ 上の可積分関数とし, $\xi \in \mathbb{R}$ に対し

$$\widehat{f}(\xi) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ix\xi} \, dx$$

と定める. この時 $\widehat{f}(\xi)$ は複素数値の連続関数となることを示せ.

8.5 レポート問題

レポートの締め切りは (今学期末までという自明なものを除いて) 特に設けません.

今回のレポート問題は [SS05, Chap. 2, §2] に基づきます.

レポート問題 8.1 (* **可積分関数の空間** L^1)**.** I を $\mathbb{R}$ 上の可積分関数全体のなす集合とする. 殆ど至る所 $f = g$ となる場合に $f \sim g$ とすることで I 上の同値関係 $\sim$ が定まる. この $\sim$ に関する I の商集合を $L^1(\mathbb{R})$ と書く. つまり

$$L^1(\mathbb{R}) := \{ f : \mathbb{R} \to [-\infty, \infty] \mid \mathbb{R} \text{ 上の可積分関数 } \} / \sim .$$

また $f \in L^1(\mathbb{R})$ に対し, その**ノルム**を次のように定める.

$$\|f\| = \|f\|_{L^1} := \int_{\mathbb{R}} |f(x)| \, dx$$

(1) $L^1(\mathbb{R})$ は $\mathbb{R}$ 上の無限次元線形空間であることを示せ.

(2) $d(f, g) := \|f - g\|_{L^1}$ が $L^1(\mathbb{R})$ 上の距離であることを示せ.

レポート問題 8.2 (** **Riesz-Fischer の定理**)**.** 前問 8.1 と同じ記号を用いる. 距離空間 $(L^1(\mathbb{R}), d)$ が完備であることを示せ.

参考文献

[SS05] E. M. Stein, R. Shakarchi, *Real Analysis: Measure Theory, Integration, and Hilbert Spaces*, Princeton lectures in Analysis Ⅲ, Princeton University Press (2005);
日本語訳: エリアス・M. スタイン, ラミ・シャカルチ著, 新井仁之, 杉本充, 高木啓行, 千原浩之訳, **プリンストン解析学講義 Ⅲ 「実解析」測度論, 積分, およびヒルベルト空間**, 日本評論社 (2017).

以上です.