数学演習 VII・VIII　5 月 30 日分小テスト解答[*1]

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp
https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida

問題. $b, c \in \mathbb{R}$ として, 実関数 $y = y(x)$ に関する 2 階の微分方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2b\frac{dy}{dx} + cy \,=\, 0$$

を考える. この微分方程式の解全体のなす実線形空間の基底を一組与えよ.

解答. $b^2 - c > 0$ の場合, 特性方程式 $\lambda^2 + 2b\lambda + c = 0$ の 2 つの実数解を $\lambda_\pm := -b \pm 2\sqrt{b^2 - c}$ として, 解空間は基底 $\{e^{\lambda_+ x}, e^{\lambda_- x}\}$ を持つ.

$b^2 - c = 0$ の場合, 特性方程式 $\lambda^2 + 2b\lambda + c = 0$ が重解 $\lambda = -b$ を持つことから, 解空間は基底 $\{e^{-bx}, xe^{-bx}\}$ を持つ.

$b^2 - c < 0$ の場合, 特性方程式 $\lambda^2 + 2b\lambda + c = 0$ は 2 つの虚数解 $\lambda = -b \pm 2\sqrt{c - b^2}i$ を持つので, 解空間は基底 $\{e^{-bx}\cos(2\sqrt{c - b^2}x), e^{-bx}\sin(2\sqrt{c - b^2}x)\}$ を持つ.

コメント. $b^2 - c$ が $> 0, = 0, < 0$ の場合に分けて $2 + 2 + 1$ 点で採点しました. 平均点は 1.4 点でした.

そもそも微分方程式が解けていない答案が多かったので, 基本的なことをコメントしておきます. この問題のような**定数係数**の線形微分方程式

$$a_0 y^{(n)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_n y = 0$$

は, $y = e^{\lambda x}$ として λ に関する代数方程式

$$a_0\lambda^n + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$$

に帰着できます. この代数方程式を**特性方程式**と呼びます. $\mathbb{C}$ 上で微分方程式を考えるなら,

- 特性方程式が重解を持たない場合は, 解を $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ として e^{λ_i} 達が解空間の基底になります.
- 重解がある場合, 例えば λ_1 が k 重解で他の λ_i $(i = 2, \ldots, n - k + 1)$ が重解でなければ, $x^j e^{\lambda_1 x}$ $(j = 0, 1, \ldots, k - 1)$ 達と e^{λ_i} $(i = 2, \ldots, n - k + 1)$ 達が解空間の基底になります.

どちらにせよ解空間は $\mathbb{C}$ 上の線形空間で, $a_0 \neq 0$ なら n 次元になります.

以上です.

[*1] 2019/05/30 版, ver. 0.1.