数学演習 VII・VIII　5 月 23 日分小テスト解答*1

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp
`https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida/2019S78.html`

問題. 次のパラメータ表示 γ を持つ平面曲線 C を考える.

$$\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = \begin{pmatrix} t^2-1 \\ t(t^2-1) \end{pmatrix}.$$

(1) 点 $\gamma(t) \in C$ における曲率 $\kappa(t)$ を求めよ. また $\kappa(t)$ の最大値を与える t の値を求めよ.

(2) C の概形を描け.

解答.　(1) $\gamma(t) = {}^T(x(t), y(t))$ とする. $(x', y') = (2t, 3t^2-1)$ および $(x'', y'') = (2, 6t)$ より

$$\kappa(t) = \frac{x'y'' - x''y'}{\left(x'^2 + y'^2\right)^{3/2}} = \frac{2t \cdot 6t - 2(3t^2-1)}{\left((2t)^2 + (3t^2-1)^2\right)^{3/2}} = \frac{6t^2+2}{\left(9t^4 - 2t^2 + 1\right)^{3/2}}.$$

そこで $f(s) := (3s+1)^2/(9s^2-2s+1)^3$ の $s \geq 0$ での増減を調べると,

$$f'(s) = \frac{-12(3s+1)(9s^2+4s-1)}{\left(9s^2-2s+1\right)^4}$$

より $s = (\sqrt{13}-2)/9$ で $f(s)$ が最大になる. よって求める値は $t = \pm\sqrt{s} = \pm\sqrt{\sqrt{13}-2}/3$.

(2) C は $y^2 = x^3 + x^2$ のグラフで, 以下のようになる.

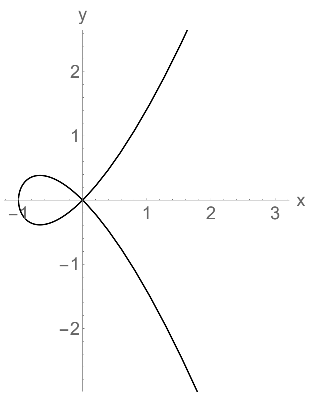

図 1　C の概形

コメント. $3+2$ 点で採点しました. 平均点は 2.5 点でした.

(1) で弧長パラメータの時の曲率の公式を使っている方が何人かいましたが, この問題の t は $|\gamma'(t)| \not\equiv 1$ なので弧長パラメータではありません.

なお (複素領域において) $y^2 = x^3 + x^2$ の定める代数曲線は楕円曲線の例になっています.

以上です.

*1 2019/05/23 版, ver. 0.1.