数学演習 VII・VIII　5 月 23 日分解答[*1]

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp
https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida/2019S78.html

6　常微分方程式 1（初等的解法）

6.1　1 階常微分方程式の初等的解法

断らない限り C, C_1 等は積分定数とする．また log の中が正の場合のみ考えることにする．

問題 6.1. $y'/y = \sin x$ より $(\log y)' = \sin x$. 両辺積分して $\log y = -\cos x + C_1$. よって $y = C\exp(-\cos x)$.

問題 6.2. $xy'' + 2y' = (xy)''$ だから $xy'' + 2y' - xy = 0 \iff (xy)'' = (xy) \iff xy = C_1e^x + C_2e^{-x}$. よって $y = (C_1e^x + C_2e^{-x})/x$.

問題 6.3. [*2]同次形なので $u = y/x$ とおいて書き直すと $xy' = y - \sqrt{xy} \iff xu' = -\sqrt{u}$. よって $u = (C - \log x)^2/4$ となり, $y = x(C - \log x)^2/4$.

問題 6.4. $y' = y$ の解である $y = C_1e^x$ に注目して, $y = ze^x$ を $y' = y + e^x$ に代入すると $z' = 1$. よって $y = (x + C)e^x$.

問題 6.5. $(1+x^2)y'+2xy = 1 \iff \big((1+x^2)y\big)' = -1 \iff (1+x^2)y = -x+C$ より $y = (-x+C)/(1+x^2)$.

問題 6.6. Bernoulli 型なので, $z = y^{-2}$ とすると $y' + xy + xy^3 = 0 \iff z' - 2xz - 2x = 0$. そこで $z = e^{x^2}w$ とすると $e^{x^2}w' = 2x$ より $w = C - e^{-x^2}$. よって $y = (Ce^{x^2} - 1)^{-1/2}$.

問題 6.7.

$$y' = y(1-y) \iff \frac{dy}{y(1-y)} = dx \iff \frac{dy}{y} + \frac{dy}{1-y} = dx$$

と変形して両辺を積分すると $\log y - \log(1-y) = x + C_2$. よって $y/(1-y) = C_1e^x$. つまり $y = 1/(1+Ce^{-x})$.

問題 6.8. $f := 3x^2y - y^3$, $g := x^3 - 3xy^2$ とすれば $\partial_y f = \partial_x g$ なので, $(3x^2y - y^3) + (x^3 - 3xy^2)y' = 0 \iff f dx + g dy = 0$ を積分して $x^3y - xy^3 = C$.

問題 6.9. 同次形なので $y = xz$ とすると

$$yy' - xy' + y = 0 \iff x(1-z)z' = z(z-2) \iff \Big(\frac{1}{z} + \frac{1}{z-2}\Big)z' = -2x^{-1} \iff z(z-2) = Cx^{-2}.$$

これから $z = 1 \pm \sqrt{1 + Cx^{-2}}$ となり, $y = x(1 \pm \sqrt{1 + Cx^{-2}})$ が一般解.

問題 6.10. $y' + x^2y = 0$ の一般解 $y = C_1e^{-x^3/3}$ に注目して, $y = ue^{-x^3/3}$ を代入すると $u' = x^2e^{x^3/3}$. よって $y = 1 + Ce^{-x^3/3}$.

[*1] 2019/05/23 版, ver. 0.2.
[*2] ver. 0.2 で修正しました.

問題 6.11. Bernoulli 型なので, $z = y^{-1}$ とすると $y' - y = xy^2 \iff z' + z + x = 0$. そこで $z = e^{-x}w$ とすると $e^{-x}w' = x$ より $w = e^x - xe^x + C$. よって $y = 1/(Ce^{-x} - x + 1)$.

問題 6.12. [*3] $(x^2+1)y' - xy = 0$ の解が $y = C_1\sqrt{x^2+1}$ であることに注目して, $y = \sqrt{x^2+1}z$ とすると

$$(x^2+1)y' - xy = x(x^2+1) \iff \sqrt{x^2+1}z' = x.$$

よって $z = 1/4 \cdot \log(x^2+1) + C$ となり, $y = \sqrt{x^2+1}(1/4 \cdot \log(x^2+1) + C)$.

問題 6.13.

$$e^y y' - x - x^3 = 0 \iff (e^y)' = x + x^3 \iff e^y = x^2/2 + x^4/4 + C \iff y = \log(x^2/2 + x^4/4 + C).$$

問題 6.14. y が x の 2 次の多項式だとして特殊解を求めると $y = x^2/2 + x + 1$. $y'' - 7y' + 10y = 0$ の一般解は $y = C_1e^{2x} + C_2e^{5x}$ だから, $y'' - 7y' + 10y = 5x^2 + 3x + 4$ の一般解は $y = C_1e^{2x} + C_2e^{5x} + x^2/2 + x + 1$.

問題 6.15. $f(z) = u + iv$ は $z = x + iy$ の正則関数なので, Cauchy-Riemann の方程式 $\partial_x u = \partial_y v$, $\partial_y u = -\partial_x v$ を満たす. $u = x^2 - y^2 + x$ より $\partial_x v = 2y$, $\partial_y v = 2x + 1$. よって $v = 2xy + y + C$ (C は実数) と書けて,

$$f(z) = (x^2 - y^2 + x) + i(2xy + y + C) = z^2 + z + iC.$$

問題 6.16. $W(x)$ が次の微分方程式を満たすことを示せば良い.

$$\frac{dW}{dx}(x) = -a_1(x)W(x).$$

行列式の微分に関する性質

$$\frac{d}{dx}\begin{vmatrix} f_{11}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ f_{21}(x) & \cdots & f_{2n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ f_{n1}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f'_{11} & \cdots & f'_{1n} \\ f_{21} & \cdots & f_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ f_{n1} & \cdots & f_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_{11} & \cdots & f_{1n} \\ f'_{21} & \cdots & f'_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ f_{n1} & \cdots & f_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} f_{11} & \cdots & f_{1n} \\ f_{21} & \cdots & f_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ f'_{n1} & \cdots & f'_{nn} \end{vmatrix} \tag{$*$}$$

から

$$W' = \begin{vmatrix} y'_1 & \cdots & y'_n \\ y'_1 & \cdots & y'_n \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ y''_1 & \cdots & y''_n \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ y'_1 & \cdots & y'_n \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n)} & \cdots & y_n^{(n)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ y'_1 & \cdots & y'_n \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n)} & \cdots & y_n^{(n)} \end{vmatrix}.$$

最後の行列式に $y_j^{(n)} = -\sum_{k=1}^n a_k(x)y_j^{(n-k)}(x)$ を代入し, 行列式の線形性を使うと

$$W'(x) = -\sum_{k=1}^n a_k(x)\begin{vmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ y'_1 & \cdots & y'_n \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-k)} & \cdots & y_n^{(n-k)} \end{vmatrix} = -a_1(x)\begin{vmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ y'_1 & \cdots & y'_n \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = -a_1(x)W(x).$$

以上です.

[*3] ver. 0.2 で修正しました.