

数学演習 VII・VIII 5月23日分問題^{*1}

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)

yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp

<https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida/2019S78.html>

6 常微分方程式 1 (初等的解法)

今回は断らない限り実数変数の実数値関数及びその微分方程式だけを考えます。

6.1 1 階常微分方程式の初等的解法

1 階常微分方程式のうち、主に正規形のものについて、初等的な解法を復習する。以下のリストや解法は [吉田 78, 第 1 編 A 第 2 章] に従っている。

独立変数 x と未知関数 $y = y(x)$ についての常微分方程式を考える。正規形の 1 階常微分方程式とは、2 変数関数 $f(z, w)$ を用いて次の形で与えられている常微分方程式のことである。

$$y' = f(x, y).$$

正規形常微分方程式のリスト

- 変数分離型 $y' = f(x)g(y)$.
 - 同次形 $y' = f(y/x)$.
 - 同次線形 $y' = p(x)y$.
 - 非同次線形 $y' = p(x)y + q(x)$.
 - * Bernoulli 型 $y' = p(x)y + q(x)y^n$.
 - * Riccati 型 $y' = p(x)y^2 + q(x)y + r(x)$.
- 完全微分 $p(x, y) + q(x, y)y' = 0$, 但し $\partial_y p(x, y) = \partial_x q(x, y)$.
 - 積分因数 + 完全微分 $p(x, y) + q(x, y)y' = 0$.

解法

- 変数分離型. $\int \frac{1}{g(y)} dy = \int f(x) dx + C$ と積分できる.
 - 同次形. $y/x = u$ において変数分離型に帰着.
 - 同次線形. 変数分離型の解法が適用できて、一般解は $y = C \exp(\int p(x) dx)$.
 - 非同次線形. $q(x) = 0$ の場合は同次線形なので解ける。得られた一般解 $y = C \exp(\int p(x) dx)$ の積分定数 C を x の関数 $z(x)$ に置き換えて $y = z(x) \exp(\int p(x) dx)$ とする。これを元の方程式に代入して得られる z の微分方程式は

$$z' = q(x) \exp\left(-\int p(x) dx\right)$$

^{*1} 2019/05/23 版, ver. 0.3.

という変数分離型になって, z を決定することができる.

* Bernoulli 型. $z := y^{1-n}$ とおくと

$$z' = (n-1)p(x)z + (n-1)q(x)$$

となって非同次線形の場合に帰着する.

* Riccati 型. 一般解は求積不可能. 一つの解 y_1 が分かれば, $y = z + y_1$ として Bernoulli 型に帰着.

- 完全微分. $p(x, y)dx + q(x, y)dy = 0$ と書き直して両辺を線積分すると

$$\int p(x, y)dx + \int q(x, y)dy = C$$

となり, x と y の関係式が得られる.

– 積分因数 + 完全微分. 上手く関数 $\lambda(x, y)$ を見つけて $\partial_y(\lambda p) = \partial_x(\lambda q)$ が成り立つようにできれば, 完全微分の場合に帰着できる.

問題

以下の問題 6.1–6.14 では, 未知関数 $y = y(x)$ に関する微分方程式の一般解を求めよ.

問題 6.1 (*). $y' - y \sin x = 0$.

問題 6.2 (*). $xy'' + 2y' - xy = 0$.

問題 6.3 (*). $xy' = y - \sqrt{xy}$.

問題 6.4 (*). $y' = y + e^x$.

問題 6.5 (*). $(1 + x^2)y' + 2xy = 1$.

問題 6.6 (*). $y' + xy + xy^3 = 0$.

問題 6.7 (*). $y' = y(1 - y)$.

問題 6.8 (*). $(3x^2y - y^3) + (x^3 - 3xy^2)y' = 0$.

問題 6.9 (*). $yy' - xy' - y = 0$.

問題 6.10 (*). $y' + x^2y = x^2$.

問題 6.11 (*). $y' - y = xy^2$.

問題 6.12 (*). $(x^2 + 1)y' - xy = x(x^2 + 1)$.

問題 6.13 (*). $e^y y' - x - x^3 = 0$.

問題 6.14 (*). $y'' - 7y' + 10y = 5x^2 + 3x + 4$.

問題 6.15 (*). 複素変数 $z = x + iy$ の正則関数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ の実部が $u = x^2 - y^2 + x$ で与えられたとする. このときの虚部 v を求め, f を z の関数として書け.

問題 6.16 (*). $a_1(x), \dots, a_n(x)$ を閉区間 $I = [s, t] \subset \mathbb{R}$ 上の連続関数とする. 未知関数 $y(x)$ に関する n 階微分方程式

$$y^{(n)}(x) + a_1(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + a_{n-1}(x)y'(x) + a_n(x)y(x) = 0$$

の線形独立な解を $y_1(x), \dots, y_n(x)$ とする. I 上の関数 $W(x)$ を次の行列式で定義する.

$$W(x) := \begin{vmatrix} y_1(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}.$$

この時, 任意の $x \in I$ について次の等式が成立することを示せ.

$$W(x) = W(s) \exp\left(-\int_s^x a_1(u) du\right).$$

6.2 レポート問題

レポートの締め切りは (今学期末までという自明なものを除いて) 特に設けません.

レポート問題 6.1 (* Gauss の超幾何微分方程式と超幾何関数). $a, b, c \in \mathbb{R}$ とする. 次の 2 階の微分方程式を Gauss の超幾何微分方程式とよぶ.

$$x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2} + (c - (a+b+1)x)\frac{dy}{dx} - aby = 0 \quad (6.1)$$

$a, b, c \notin \{-1, -2, -3, \dots\}$ ならば, 次の級数で与えられる関数 $F(a, b; c; x)$ が (6.1) の解であることが知られている.

$$F(a, b; c; x) := \sum_{n \geq 0} \frac{(a)_n (b)_n}{(1)_n (c)_n} x^n = 1 + \frac{ab}{c}x + \frac{a(a+1)b(b+1)}{2c(c+1)}x^2 + \dots.$$

但し, $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し $(z)_n$ は次で与えられる.

$$(z)_0 := 1, \quad (z)_1 := z, \quad (z)_n := z(z+1)\cdots(z+n-1).$$

関数 $F(a, b; c; x)$ を Gauss の超幾何関数とよぶ. この問題では, $F(a, b; c; x)$ が (6.1) の級数解であることを確かめていく.

(1) $F(a, b; c; x)$ の k 次係数を

$$f_k := \frac{(a)_k (b)_k}{(1)_k (c)_k}$$

と置く. また

$$p(x) := (x+1)(x+c), \quad q(x) := (x+a)(x+b)$$

とする. この時, 次式が成立することを示せ.

$$f_{k+1} \cdot p(k) - f_k \cdot q(k) = 0.$$

(2) $\vartheta_x := x \frac{d}{dx}$ を Euler 微分とよぶ. 任意の 1 変数多項式 $s(z)$ に対し, $s(\vartheta_x)$ を形式的に変数 z を ϑ_x に置き換えてできる微分作用素とする. この時, 次の等式が成立することを示せ.

$$s(\vartheta_x)(x^k) = x^k s(k).$$

(3) 次の等式を示せ.

$$p(\vartheta_x - 1)(F(a, b; c; x)) = \sum_{k \geq 0} x^{k+1} f_{k+1} p(k), \quad q(\vartheta_x)(F(a, b; c; x)) = \sum_{k \geq 0} x^k f_k q(k).$$

(4) 微分作用素 L を

$$L := p(\vartheta_x - 1) - xq(\vartheta_x)$$

と定める. 次式が成立することを示せ.

$$L(F(a, b; c; x)) = 0.$$

(5) 次の等式を示せ

$$x^{-1}L = x(1-x)\frac{d^2}{dx^2} + (\gamma - (\alpha + \beta + 1)x)\frac{d}{dx} - \alpha\beta.$$

以上の議論, 特に問 (4) と (5) から, $F(a, b; c; x)$ が (6.1) の級数解であることが分かった.

参考文献

[吉田 78] 吉田耕作, 微分方程式の解法 第2版, 岩波全書, 1978 年.

連絡事項

5/24(金) と 5/31(金) のオフィスアワーはお休みさせていただきます。

以上です.